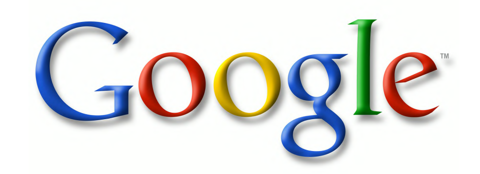
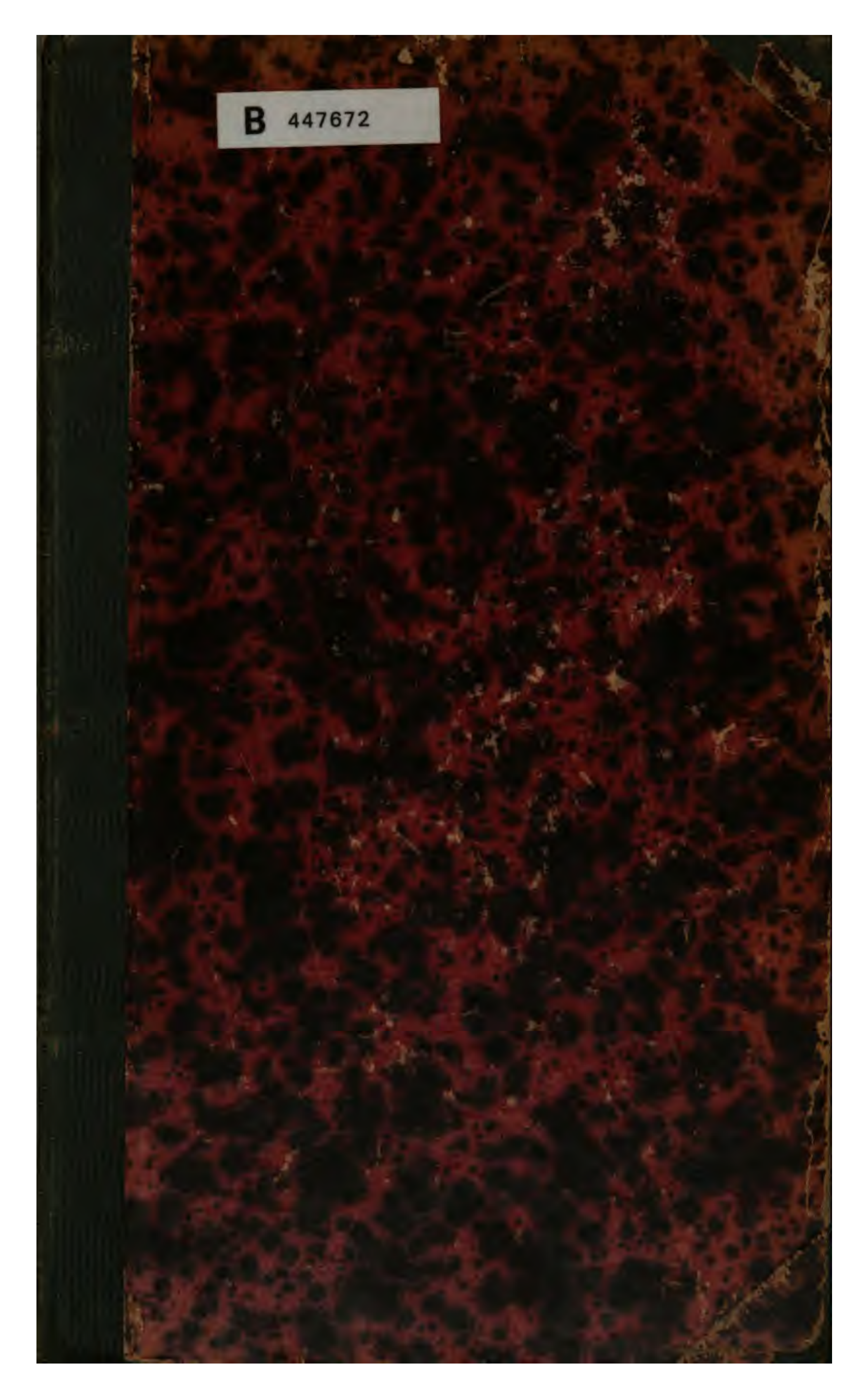
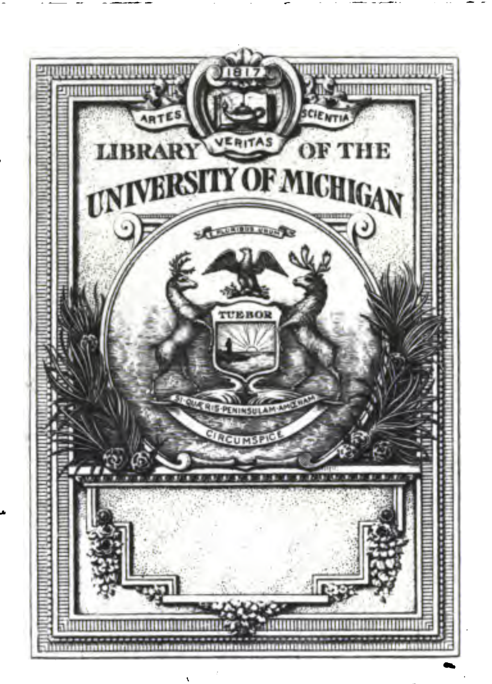
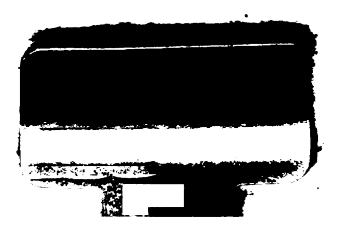



B 447672





1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



LESSEN

OVER

DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL-REKENING.

LESSEN

OVER

DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL-REKENING,

DOOR

R. LOBATTO,

MATH. MAG. ET PHIL. NAT. DOCTOR.

HOOGLEERAAR IN DE HOOGERE WISKUNDE AAN DE KONINKLIJKE AKADEMIE TER OPLEIDING VAN BURGERLIJKE INGENIEURS ENZ. TE DELFT, ADVISEUR VOOR DE ZAKEN DER MATEN EN GEWIGTEN BIJ HET DEPARTEMENT VAN BINNENLANDSCHE ZAKEN, RIDDER DER ORDE VAN DEN NEDERLANDSCHEN LEEUW, LID VAN HET KONINKLIJK NEDERLANDSCHE INSTITUUT EN VAN ANDERE GELEERDE GENOOTSCHAPPEN.

EERSTE DEEL.

DIFFERENTIAAL-REKENING.



IN 's GRAVENHAGE EN TE AMSTERDAM, BIJ

DE GEBROEDERS VAN CLEEF.

1851.

GEDRUKT BIJ DE GEBROEDERS VAN CLEEF.

VOORREDE.

Met de uitgave dezer lessen heb ik voornamelijk beoogd den vaderlandschen beoefenaren der wiskundige wetenschappen een leerboek aan te bieden, waardoor zij, zonder tot uitheemsche geschriften toevlugt te nemen, de hoofd-onderwerpen der differentiaal- en integraal-rekening kunnen leeren kennen, en hetwelk tevens geschikt zij tot eene voorbereidings-studie voor de zoodanigen die, door eene bepaalde zucht naar hoogere kennis gedreven, de wetenschap dieper trachten te doorgronden, en te dien einde de schriften der beroemde mannen verlangen te bestuderen, aan wie de wiskundige analysis haren tegenwoordigen staat van vordering te danken heeft.

Uit dat oogpunt beschouwd, kan de door mij ondernomen arbeid geene aanspraak op volledigheid maken. Eene te groote uitvoerigheid zou ook met het voorgestelde doel niet geheel in overeenstemming geweest zijn. Desniettemin vlei ik mij dat het eerste gedeelte, hetwelk thans het licht ziet, en eeniglijk aan de differentiaal-rekening gewijd is, de voornaamste toepassingen omvat, welke daarvan, zoo op onderwerpen van zuiver analytischen aard, als op de theorie der kromme lijnen en der gebogen vlakken van verschillende soort, te maken zijn, over welk laatste gedeelte daarenboven, voor zooveel mij bekend is, tot dus verre weinig of niets in onze taal geschreven is.

In navolging van Cauchy en andere hedendaagsche schrijvers, heb ik vermeend de leer der oneindig kleinen, in verband met die der limieten, tot grondslag der differentiaal-rekening te moeten aannemen. Ondanks de pogingen door vele wiskundigen aangewend, om in de verklaring van

de gronden dezer rekening, alle beschouwingen van oneindig kleine grootheden en van limieten ter zijde te stellen, ja zelfs om de notatie, van Leibnitz *afkomstig, door eene hiervan geheel afwijkende te vervangen, is men echter thans, vrij algemeen, daarvan terug gekomen*(*). *En inderdaad, de leer der oneindig kleinen, mits behoorlijk verklaard, kan bij den leerling weinig of geen' aanstoot verwekken: zij is evenmin te beschouwen als in tegenspraak met de wiskundige strengheid, zoo men daarbij slechts in het oog houdt, dat men, in de toepassing, nimmer te doen heeft met de onbepaalde waarden dezer grootheden zelven, maar eeniglijk met de grenswaarden van hare onderlinge verhoudingen, dat is: met die bepaalde waarden, waartoe deze verhoudingen meer en meer naderen, en waarvan zij dus minder dan de kleinst te geven grootheid kunnen verschillen. Ongetwijfeld zal men er niet in slagen, den leerling een helderder begrip der differentiaal-rekening te geven, of hem beter den waren geest derzelve te doen vatten, door de differentialen, in navolging van andere schrijvers, als* nullen *te beschouwen. Mij althans is eene verhouding tusschen grootheden, die opgehouden hebben te bestaan, steeds als wiskundige onzin voorgekomen, daargelaten nog de moeijelijkheid, waarin men alsdan vervalt bij het onderscheiden tusschen de differentialen van veranderlijke en die van standvastige grootheden. In het gebruik der oneindig kleinen ligt daarenboven een vermogend middel van onderzoek opgesloten, vooral in de hoogere deelen der Mechanica, waarvan de schriften der eerste meesters, overvloedig voorbeelden opleveren.*

Die terugkeer, welken ik hiervoren bedoelde, mag tot bevestiging strekken van de juistheid der oorspronkelijke Leibnitiaansche *begrippen, en voorzeker zouden deze, na hare bekendwording, minder tegenkanting bij sommige tijdgenooten van* Leibnitz *ondervonden hebben, indien die uitmuntende wiskundige aanvankelijk in eenige meerdere ontwikkeling omtrent den geest zijner methode ware getreden.* (†)

(*) *Men denke hierbij slechts aan de* Théorie des fonctions analytiques *van* Lagrange, *waarin een nieuw teekenschrift voor de differentiaal-verhoudingen van verschillende orden voor functiën van twee of meer veranderlijke grootheden ingevoerd wordt; welke nieuwigheid evenwel geen ingang onder de overige wiskundigen heeft kunnen vinden, zoodat de beroemde schrijver, bij de latere uitgave zijner* Mécanique analytique, *wederom van de oude, doch meer doelmatige,* Leibnitiaansche *teekens gebruik gemaakt heeft.*

(†) *De strijd over de eer der uitvinding van de differentiaal-rekening, zoo geruimen tijd volgehouden tusschen de voorstanders van* Newton *en die van* Leibnitz, *heeft bij elken onpartijdige de meening moeten vestigen, dat* Leibnitz *geenszins, uit hem medegedeelde denkbeelden van* Newton, *tot zijne vinding geraakt is, doch dat elk hunner, de zaak uit geheel verschillende gezigtspunten*

Ten aanzien der zamenstelling van dit eerste deel, zij hier alleen het navolgende vermeld.

In de volgorde der behandelde onderwerpen heb ik mij, met betrekking tot één punt, eene afwijking veroorloofd van die, welke in andere leerboeken aangenomen is, en waaromtrent ik eenige opheldering te dezer plaatse niet overbodig acht, ter voorkoming van verkeerde beoordeelingen. Zij bestaat namelijk hierin, dat de differentiatie der functiën van twee en meer veranderlijke grootheden, niet onmiddelijk op die der functiën van ééne enkele veranderlijke volgt, maar eerst later, en wel na de toepassing der differentiaal-rekening op de theorie der vlakke kromme lijnen, behandeld wordt.

Tot zoodanige afwijking werd ik voornamelijk geleid door de overweging, dat er geene dadelijke behoefte bestaat, om den eerstbeginnenden reeds spoedig met de studie van een gedeelte der differentiaal-rekening bezig te houden, hetwelk, wegens zijne afgetrokkenheid, meerdere inspanning van hem vordert, dan het overige gedeelte, en waarvan hij de meetkunstige toepassingen, in allen gevalle, eerst bij de verklaring van de theorie der lijnen van dubbele kromming en gebogen oppervlakken, kan leeren kennen. Zulk eene verandering van volgorde kwam mij daarenboven voor, het voordeel op te leveren, dat de eerste toepassingen der differentiaal-rekening op meetkundige onderwerpen, en welke steeds een helder licht over den waren geest dezer rekening kunnen verspreiden, niet langer dan noodig behoeven uit te blijven. Het ontbreekt welligt niet aan gronden, welke voor de gewone volgorde pleiten, en uit dien hoofde zal ik gaarne het gevoelen eerbiedigen van hen, die omtrent dat punt anders mogten denken.

---

beschouwende, daarbij op eene zelfstandige wijs te werk is gegaan. In dezen laatsten tijd is dat gevoelen op eene voldoende wijs bevestigd geworden, door de verdienstelijke bemoeijingen van Dr. C. J. Gerhardt *te* Salzwedel, *die uit de op de Koninklijke Bibliotheek te* Hanover *zorgvuldig bewaarde handschriften van* Leibnitz, *onderscheidene stukken verzameld en in een klein geschrift, ten titel voerende:* Die Entdeckung der Differential-Rechnung, durch Leibnitz, Halle 1848, *in het licht gegeven heeft, waardoor thans alle twijfel moet verdwijnen omtrent de oorspronkelijkheid der begrippen, welke dezen beroemden man trapsgewijs tot de nieuwe rekenwijze geleid hebben. Dezelfde geleerde heeft daarenboven in* 1849 *eene belangrijke bijdrage tot de geschiedenis der wiskundige wetenschappen geleverd, door de uitgave der briefwisseling tusschen* Leibnitz *en* Huigens, de l'Hopital, Newton *en andere zijner tijdgenooten gevoerd. Deze verzameling van stukken vormt het eerste gedeelte van een werk, waarin alle geschriften van* Leibnitz, *zoowel de reeds in druk uitgegevene, als de door hem nagelatene, onder den titel van* Leibnizens mathematische Schriften, *zullen vereenigd worden.*

Wijders heb ik getracht, de verklaarde theoriën zoo veel mogelijk door voorbeelden toe te lichten, en hierbij den lezer tevens eenigen voorraad van stof tot eigen oefening aan te bieden, welk een en ander, mijns inziens, tot de vereischten van een leerboek behoort, en waarin de vreemde schrijvers, over het algemeen, te kort schieten.

De bijvoeging der fransche terminologie, *welke men op vele plaatsen zal aantreffen, is eeniglijk geschied met het oogmerk, om de lezing der fransche werken over de hoogere deelen der wiskunde, voor onze landgenooten gemakkelijker te maken.*

Dit boekdeel zal zoodra mogelijk, en naar ik hoop, nog in den loop des volgenden jaars, door een tweede gevolgd worden, bevattende dat gedeelte der integraal-rekening, welks kennis, voor de toepassing op de rectificatie van kromme lijnen, de inhouds-bepaling zoo van vlakke figuren en van gebogen oppervlakken, als van omwentelings- en andere ligchamen, vereischt wordt. Hiertoe zijn de bouwstoffen reeds grootendeels verzameld.

Mogt aan dezen mijnen arbeid een niet ongunstig onthaal, van wege onze vaderlandsche beoefenaars der wiskunde, te beurt vallen, dan zou ik mij hierdoor opgewekt gevoelen, mijne krachten te beproeven aan de bearbeiding van het hoogere gedeelte der integraal-rekening, omvattende namelijk de verschillende handelwijzen voor de oplossing of integratie der differentiaal-vergelijkingen van alle orden tusschen twee en meer veranderlijke grootheden, en waaraan men, bij de toepassing der analysis op onderwerpen tot het gebied der natuur- en werktuigkunde behoorende, meer bepaaldelijk behoefte ondervindt.

Doordrongen van de waarheid, dat alle menschelijke arbeid den stempel van onvolkomenheid draagt, zal ik erkentelijk zijn voor de opmerking, door eene bevoegde kritiek, van alle gebreken en leemten, welke in dit werk zullen aangetroffen worden.

Ten slotte strekt het mij tot een' aangenamen pligt, hier de gewigtige dienst te vermelden mij, bij de uitgave van dit boekdeel, bewezen door een' jong wiskundige van voortreffelijken aanleg, den Heer L. Cohen Stuart, *oud-kweekeling der Delftsche Akademie. Niet alleen toch mogt ik zijne medehulp ondervinden in de correctie der drukproeven en het teekenen der platen, maar ik had daarenboven het voorregt, aan zijn helder doorzigt menige aanmerking verschuldigd te zijn, welke tot verduidelijking en verbetering van den tekst heeft geleid. Hij ontvange hiervoor bij deze de betuiging mijner innige dankbaarheid.*

de Schrijver.

Delft, Dec. 1850.

INHOUD.

Bladz.

Zie aan het einde van dit werk eene opgave van *drukfeilen* en *misstellingen*.

LESSEN

OVER DE

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL-REKENING.

EERSTE LES.

Grondbegrip der differentiaal rekening. Verklaring der oneindig kleinen van verschillende orden.

§ 1. In de gewone algebra stelt men zich hoofdzakelijk ten doel, met behulp van gegevene betrekkingen of vergelijkingen tusschen bekende en onbekende grootheden, de waarden dezer laatste uit die der eerste, naar bepaalde regels af te leiden. In de hoogere deelen der wiskundige analysis echter, beschouwt men de grootheden tevens in een' veranderlijken toestand, waaruit het begrip van functiën ontstaan is. (*Hoogere Algebra* § 1.) Heeft men nu slechts eene enkele betrekking tusschen verschillende grootheden, dan kunnen zich onder dezelve eenige bevinden, die, in den loop der beschouwing, geene verandering van waarde ondergaan, en uit dien hoofde met den naam van ***standvastigen*** bestempeld worden, terwijl de overige, vatbaar zijnde om een oneindig aantal positieve of negatieve waarden te bekomen, als zoodanig, ***veranderlijke grootheden*** genaamd worden. Eene dezer veranderlijken laat zich dan als eene functie der overige beschouwen, welke, indien zij door geene bijzondere betrekkingen aan elkander verbonden zijn, den naam dragen van ***onafhankelijke veranderlijke grootheden*** of ***elementen*** dezer functie. Aldus zullen bijv. de grootheden a, b, r in de algemeene vergelijking van den cirkel

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

als ***standvastige***, de grootheden x en y daarentegen als ***veranderlijke***

voorkomen, vermits de drie eerste, de coördinaten van het middelpunt en de grootte van den straal aanwijzende, zoo lang men denzelfden cirkel beschouwt, *niet* van waarde veranderen; terwijl de beide overige grootheden x en y, welke de coördinaten van een willekeurig punt der kromme voorstellen, tevens met de ligging van dat punt van waarde zullen veranderen. Hier is dus y eene functie van x alleen, en wederkeerig x eene functie van y alleen, zoodat elke verandering in de waarde van eene dezer twee grootheden, eene overeenkomstige verandering in die der andere ten gevolge zal moeten hebben. Laat men nu insgelijks den straal des cirkels van grootte veranderen, dan wordt y gezegd eene functie der twee van elkander onafhankelijke veranderlijken x en r te zijn, en blijkbaar zal de verandering van y thans gelijktijdig afhankelijk zijn van die, welke x en r afzonderlijk of gezamenlijk ondergaan.

§ 2. Elke betrekking tusschen twee veranderlijke grootheden, het zij men die voorstelt onder den vorm $y = F(x)$ of onder den vorm $f(x, y) = 0$, kan beschouwd worden als de vergelijking eener kromme lijn, waarvan de coördinaten der opvolgende punten door x, en y aangewezen worden. Hierdoor verkrijgt men eene meer aanschouwelijke voorstelling van den aard dezer functie en van de verschillende waarden, waarvoor zij vatbaar is. Even zoo zal elke betrekking tusschen drie veranderlijke grootheden x, y, z, aangewezen door $z = f(x, y)$ of door $\varphi(x, y, z) = 0$, mits daarin twee dezer veranderlijken van elkander geheel onafhankelijk zijn, steeds een gebogen oppervlak kunnen voorstellen, waarvan de achtervolgende punten tot coördinaten hebben x, y, z. Wij zullen ons voor als nog bij de eerste soort van functiën bepalen, en de overige die tot de meer zamengestelde behooren, later tot een punt van beschouwing maken.

§ 3. Elke functie y van eene veranderlijke grootheid x, hetzij die tot de algebraïsche of de transcendentale behoort (*), wordt gezegd eene *onafgebrokene* functie (*fonction continue*) tusschen de grenzen $x = x_1$. en $x = x_2$ te zijn, wanneer zij voor alle mogelijke tusschen liggende waarden van x, eindige en bestaanbare waarden van y oplevert, terwijl zij, ingeval eene of meer dezer waarden van y oneindig groot of onbestaanbaar worden, eene *afgebrokene*

(*) Het onderscheid in den aard dezer beide soorten van functiën, is reeds in onze *Lessen over de Hoogere Algebra* § 2 verklaard.

functie (*fonction discontinue*) tusschen die grenzen van x, genaamd wordt.

Aldus zal $y = A\sqrt{(a^2 - x^2)}$, eene onafgebrokene functie van x voorstellen, voor alle waarden van het veranderlijke element, begrepen tusschen $x = -a$ en $x = +a$. Hetzelfde geldt van de functiën $y = a + bx + cx^2 +$ enz., $y = sin.\, x$, $y = b\, tg\, x$ welke voor alle waarden van x, gelegen tusschen $x = -\infty$ en $x = +\infty$, dat is, voor alle mogelijke positieve en negatieve waarden van x, aan de gestelde voorwaarden voldoen.

Daarentegen zal de functie $y = \frac{a^2}{x-b}$ afgebroken zijn tusschen de grenzen $x = 0$ en $x = c$, $c > b$ zijnde, dewijl voor $x = b$, y oneindig wordt. Met de functie $y = a + \frac{x}{b}\sqrt{(x^2 - c^2)}$, zal zulks even eens het geval zijn tusschen de grenzen $x = 0$, $x = c$, uithoofde y alsdan onbestaanbaar wordt.

Beschouwt men hierbij de kromme lijnen, welke door de voorgaande vergelijkingen voorgesteld worden, dan is het klaar, dat zij in het geval der continuiteit, een zamenhangend geheel vormen tusschen de punten, welker abscissen met de grenswaarden van x overeenstemmen, terwijl het tegenovergestelde plaats vindt in het geval der discontinuiteit, als wanneer de verschillende deelen eener kromme door geenen geleidelijken overgang aan elkander verbonden worden.

Eene functie wordt daarenboven gezegd onafgebroken te zijn, in de nabijheid eener bijzondere waarde van $x = a$, gelegen tusschen $x = x_1$, en $x = x_2$, bijaldien zij hare continuiteit behoudt tusschen die grenzen, hoe klein ook het verschil $x_2 - x_1$ genomen zij. Het tegenovergestelde vindt plaats bij aldien de functie afgebroken is tusschen die naauwe grenzen. Aldus zal in de functie $y = Atg.\, x$, de continuiteit verbroken zijn voor $x = \frac{\pi}{2}$.

§ 4. In het begrip der continuiteit ligt noodzakelijk opgesloten, dat indien men het veranderlijke element van x_1 tot x_2 laat aangroeijen met verschillen of incrementen, minder dan de kleinst te geven grootheid bedragende, de overeenstemmende verschillen tusschen de waarden der functie y, insgelijks onbepaald klein zullen worden, zoo dat y inmiddels alle mogelijke tusschenwaarden kan verkrijgen. Het zijn deze kleine verschillen waarmede men elke eindige verandelijke grootheid kan doen aanwassen of afnemen, welke in

de hoogere wiskunde met den naam van *oneindig kleinen* bestempeld worden, en welker beschouwing den grondslag der differentiaal rekening uitmaakt.

Onder *oneindig kleine* grootheid verstaan wij alzoo eene grootheid die kleiner zij dan elke te gegeven gelijksoortige grootheid; zij heeft mitsdien geene *bepaalde* waarde, maar kan naar welgevallen tot hare limiet *nul* naderen.

Het denkbeeld van oneindig klein staat in naauw verband met dat van oneindig groot, waaronder men, gelijk bekend is, niets anders verstaat dan eene onbepaalde grootheid, steeds grooter zijnde dan elke andere denkbare grootheid van dezelfde soort. Indien bijv. de verhouding $\frac{A}{B}$ tusschen twee veranderlijke grootheden A en B oneindig groot wordt, kan zulks ontstaan, het zij uit eene grenzelooze toeneming van A, hetzij uit eene grenzelooze afneming van B. In dit laatste geval nu blijft A eene eindige, doch wordt B met betrekking tot A eene oneindig kleine grootheid.

§ 5. Van veel belang is het hier aan te toonen dat, indien α en β oneindig kleinen zijn, voorstellende de gelijktijdige aangroeijingen van twee van elkander afhankelijke veranderlijke grootheden, de betrekking tusschen die oneindig kleinen vatbaar is voor eene limiet, welke, in het algemeen, eene eindige of bepaalde waarde verkrijgt. Deze eigenschap, waarin het grondbegrip der differentiaalrekening opgesloten ligt, kan uit de beschouwing eener kromme lijn gemakkelijk aldus betoogd worden.

Zij MM' (*fig.* 1 en 2) eene zekere kromme tot vergelijking hebbende $y=f(x)$. Laat PP' de eindige of bepaalde aangroeijing Δx voorstellen, welke de abscis $OP=x$ van eenig punt M ondergaat, dan zal met de abscis $OP'=x+\Delta x$, overeenstemmen de ordinaat $M'P'=y+\Delta y$, zoo dat Δy de eindige aangroeijing $M'N$ beteekent, welke de ordinaat y ondergaat bij den overgang van het punt M tot het punt M'. De aangroeijingen of veranderingen Δx, Δy der coördinaten x,y worden ook met de benaming van *differentien* of eindige verschillen bestempeld. Zij zullen beiden positief zijn, wanneer een aanwas van x tevens eene aangroeijing van y te weeg brengt, gelijk in de beide figuren het geval is. Het kan echter ook gebeuren, dat met eene positieve waarde van Δx, eene negatieve van Δy overeenstemt of omgekeerd, hetwelk van den loop der kromme en dus van den aard der gegevene functie af-

hangt. Heeft men bijv. $y=\frac{a^2}{x}$, dan is het duidelijk dat x niet kan toenemen zonder dat y gelijktijdig afneemt, of omgekeerd, zoo dat Δx en Δy hier noodzakelijk van tegengestelde teekens zullen zijn. Niets belet intusschen om die differentiën beiden als positief te blijven beschouwen, dewijl de bewerking, waardoor de eene in functie der andere bepaald kan worden, van zelve het teeken doet kennen, waarmede Δy, voor positieve of negatieve waarden van Δx, moet aangedaan zijn. Nu heeft men, op grond van het hiervoren verklaarde, de vergelijking

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x);$$

derhalve

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

waaruit verder volgt, voor de betrekking tusschen de gelijktijdige aangroeijingen der beide coördinaten van eenig onbepaald punt der kromme,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Bij het aanhoudend verminderen van Δy en Δx, zullen de punten M,M' blijkbaar elkander meer nabij komen. De teller en noemer van het voorgaande gebroken naderen elk in het bijzonder tot hunne limiet nul; doch met het gebroken zelve zal zulks niet even eens gesteld zijn, dewijl het, in het algemeen, eene bepaalde en eindige waarde tot limiet verkrijgt.

Immers, de verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ beteekent niets anders dan de trigonometrische tangens van den hoek door de koorde of snijlijn MM' met de as der x gevormd. Laat men nu het punt M' tot M naderen, dan zal de rigting der snijlijn al minder en minder afwijken van die der raaklijn MQ aan het punt M, waardoor de rigting der kromme in dat punt wordt aangewezen, zonder evenwel met die raaklijn te kunnen overeenkomen, zoo lang Δy en Δx nog eenige eindige waarden, hoe gering ook, bezitten. De limiet van het gebroken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wordt alzoo voorgesteld door den tangens van den hoek MTX tusschen de raaklijn en het positieve deel van de as der x begrepen, en is blijkbaar afhankelijk van de plaats van het punt (x,y), omdat het in den aard eener kromme lijn ligt, aanhoudend van rigting te veranderen. Zij kan dus insgelijks als eene functie van x, die wij door $f_1(x)$ zullen aanduiden, beschouwd worden. Dienvolgens stellen wij

$$\text{Lim.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = f_1(x) \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Deze nieuwe functie heeft de benaming van *afgeleide* functie (*fonction dérivée*) verkregen, uithoofde zij naar bepaalde regels, die wij straks verklaren zullen, uit de oorspronkelijke functie $f(x)$ wordt afgeleid (*).

§ 6. Het is thans duidelijk, welke zin in de vergelijking (2) opgesloten ligt. De differentien Δx, Δy hebben namelijk daarbij geene bepaalde waarde, maar worden beschouwd als verkeerende in een' staat van grenzelooze afneming; zij komen dus, naar de vroeger gegevene bepaling (§ 4) hier eeniglijk als *oneindig kleine* grootheden voor. Bij deze beschouwing worden zij, ter onderscheiding der eindige differentien, genaamd *differentialen*, terwijl daarenboven de grieksche Δ, in navolging van Leibnitz, den grondlegger van de leer der oneindig kleinen, alsdan door de romeinsche *d* vervangen wordt, zoodat dx, dy de differentialen of oneindig kleine aangroeijingen van de veranderlijken x en y beteekenen, van welke notatie wij ons zullen blijven bedienen (†). Dienovereenkomstig kunnen wij als nu schrijven:

$$\text{Lim.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx} = f_1(x).$$

De afgeleide functie $f_1(x)$ *stelt alzoo de waarde voor van de limiet der verhouding tusschen de oneindig kleine veranderingen*, dy, dx, *welke eenige functie* y *en haar veranderlijk element* x *gelijktijdig ondergaan.* Men noemt de verhouding $\frac{dy}{dx}$ veelal het differentiaal quotient of de differentiaal coefficient der functie y. Voor sommige bijzondere waarden van x, kan deze limiet 0 of ∞ worden, hetgeen blijkbaar van de veranderlijke rigting der raaklijn in de onderscheidene punten der kromme afhankelijk is. In het eerste geval loopt die lijn evenwijdig aan, en in het tweede staat zij loodregt op de as der abscissen.

(*) De beroemde Lagrange van wien deze benaming afkomstig schijnt, stelde die afgeleide functie voor door y' of $f'(x)$.

(†) Onze vaderlandsche wiskundigen zijn vrij algemeen gewoon tot differentiaalteeken te gebruiken den letter *d* in den bijzonderen vorm ∂. Wij zien echter geene voldoende reden, om hierin van de meeste buitenlandsche schrijvers af te wijken. Later zullen wij gelegenheid hebben, het teeken ∂ tot eene meer beknopte notatie der differentiaal verhoudingen te bestemmen.

§ 7. De voorgaande beschouwing leidt ons van zelf tot de navolgende eigenschap der functien in verband tot hare differentiaal quotienten. Indien namelijk eene onafgebroken functie $y = f(x)$, tusschen de grenzen x_0, x_1 steeds *toenemende* of *afnemende* is, voor aangroeijende waarden van x, zal haar differentiaal quotient $\frac{dy}{dx}$ tusschen die grenzen eene *positieve* of *negatieve* waarde behouden. Immers, in het eerste geval blijven Δx, Δy van gelijke teekens, zoodat de verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eene positieve waarde behoudt. In het tweede geval daarentegen verkrijgen Δx, Δy ongelijke teekens, waardoor de gezegde verhouding negatief wordt; en zulks geldt klaarblijkelijk eveneens van de limieten dezer verhoudingen. Is nu $y = 0$, voor $x_0 = 0$, dan zijn $\frac{dy}{dx}$ en y gelijktijdig positief of negatief, naar dat deze laatste positief of negatief is tusschen de aangenomen grenzen; waaruit bij omkeering volgt, dat zoo lang $\frac{dy}{dx}$ positief of negatief is, de functie y, indien zij namelijk, te gelijk met x verdwijnt, insgelijks positief of negatief zal zijn voor positieve waarden van x.

§ 8. Volgens fig. (1) heeft men

$$M'N = QN + M'Q,$$

en volgens fig. (2)

$$M'N = QN - M'Q,$$

dat is, wanneer men die beide gevallen in eene enkele betrekking zamenvat,

$$M'N = QN \pm M'Q.$$

Nu kan de lengte der lijn $M'Q$, daar zij gelijktijdig met Δx tot nul nadert, uitgedrukt worden door $\omega \Delta x$, waarin de factor ω eene functie van x en Δx beteekent; wij hebben alsdan, uithoofde van $\frac{dy}{dx} = \frac{QN}{MN}$, de vergelijking

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x \pm \omega \Delta x,$$

of

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \pm \omega.$$

Zoolang Δy, Δx eindige waarden behouden, zal ω insgelijks eene dusdanige waarde, hoe klein ook, verkrijgen, en men heeft

$$\Delta y = \left(f_1(x) \pm \omega\right) \Delta x$$

terwijl men, tot de limiet overgaande, als wanneer ω nul wordt, zal mogen schrijven

$$dy = f_1(x)\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

en hieruit besluiten, dat *de differentiaal eener functie van* x *gelijk is aan het product van hare afgeleide functie met* dx.

De voorgaande waarde voor dy schijnt, strikt genomen, niet geheel naauwkeurig te zijn, uithoofde van het achterwege laten van den tweeden term $\omega\Delta x$. Deze weglating ligt echter geheel in den geest der differentiaal rekening, welke geenszins de hoegrootheid der oneindig kleine aangroeijingen zelven, maar wel die van de limiet der tusschen haar bestaande verhoudingen in aanmerking neemt. Uit dat oogpunt beschouwd, hebben de vergelijkingen

$$dy = f_1(x)\,dx \quad \text{en} \quad dy = f_1(x)\,dx \pm \omega dx$$

eene en dezelfde beteekenis. Immers, daar ω hier insgelijks eene oneindig kleine grootheid voorstelt, geeft de laatste vergelijking even als de eerste te kennen, dat de differentiaal verhouding $\frac{dy}{dx}$ tot limiet heeft $f_1(x)$. Nu is in de vergelijking

$$dy = f_1(x)\,dx \pm \omega dx,$$

de term ωdx blijkbaar oneindig klein in verhouding tot den voorafgaanden, die reeds eene oneindig kleine waarde heeft, en omdat die term uit twee oneindig kleine factoren zamengesteld is, wordt hij beschouwd als eene oneindig kleine of eene differentiaal van de tweede orde, wanneer namelijk dy en dx differentialen van de eerste orde voorstellen.

Het blijkt thans uit het voorgaande, dat indien men twee punten M, M' eener kromme op een' oneindig kleinen afstand van elkander neemt, de lijnen PP', $M'N$ en QN, differentialen van de eerste orde zullen zijn, de lijn $M'Q$ daarentegen tot de differentialen van de tweede orde zal behooren, en alzoo evenmin vergelijkbaar is met eene der vorige, als eene differentiaal der eerste orde met eene eindige grootheid. Onder de voorbeelden van dien aard, welke de gewone meetkunst oplevert, zullen wij het navolgende bijbrengen tot nadere opheldering van het begrip der onderlinge betrekking tusschen de oneindig kleinen der eerste en tweede orde. Voor eenen cirkelboog, die oneindig klein is, zijn de koorde en de sinus mede oneindig klein, en wel van de eerste orde, omdat de verhouding tusschen twee dezer drie grootheden, zoo als

bekend is, tot de eenheid nadert, en dus eene eindige waarde tot limiet heeft (*). De sinus versus daarentegen zal, omdat hij derde evenredige is tot de middellijn en de koorde, noodzakelijk eene oneindig kleine van de tweede orde, en uit dien hoofde niet vergelijkbaar zijn bij de koorde of den sinus des boogs.

Niets belet nu eene lijn te denken, welke ten aanzien van den sinus versus wederom oneindig klein is, en alzoo als oneindig kleine van de derde orde met betrekking tot eene eindige grootheid, of als eene oneindig kleine van de tweede orde met betrekking tot eene van de eerste orde, te beschouwen is; en op die wijze voortgaande kan men zich eene reeks van grootheden denken, die oneindig kleinen van verschillende orde zullen voorstellen, gelijk onder anderen het geval is met de reeks

$$\frac{a}{n}, \frac{b}{n^2}, \frac{c}{n^3}, \frac{d}{n^4} \text{ enz.}$$

indien men hierin n onbepaald laat aangroeijen.

§ 9. Het gebruik dezer oneindig kleinen van verschillende orden in de differentiaal-rekening berust op de navolgende hoofdeigenschappen, welke van veelvuldige toepassing zijn.

1°. Indien α en β respectievelijk twee oneindig kleinen van de n^e en van de $(n+m)^e$ orde beteekenen, zal hare verhouding $\frac{\beta}{\alpha}$ eene oneindig kleine van de m^e orde worden, en alzoo nul tot limiet hebben.

2°. Zijn zij beiden van de n^e orde, dan wordt de limiet van hare verhouding eene eindige grootheid. Hetzelfde geldt van de verhouding $\frac{\beta}{\alpha^n}$, indien α eene oneindig kleine van de eerste orde en β eene van de n^e orde is. Hieruit volgt, dat elke oneindige kleine van

(*) Men kan zulks gemakkelijk aldus betoogen.

Daar $sin.\varphi < \varphi$ is, zal altijd $\frac{sin.\varphi}{\varphi} < 1$ zijn. De boog φ is echter altijd $< tg.\varphi$, dewijl de regthoekige driehoek door den straal, de tangens en de secans gevormd eenen grooteren inhoud heeft, dan de ingesloten cirkel-sector. Derhalve heeft men

$$\frac{sin.\varphi}{\varphi} < 1 \text{ en } \frac{sin.\varphi}{\varphi} > \frac{sin.\varphi}{tg.\varphi} > cos.\varphi.$$

Maar $cos.\varphi$ tot de eenheid naderende bij het kleiner worden van φ, zoo zal de verhouding $\frac{sin.\varphi}{\varphi}$ noodzakelijk de eenheid tot limiet hebben.

de n^e orde kan voorgesteld worden door een product van den vorm ka^n, waarin k eene eindige grootheid, en a eene oneindig kleine van de eerste orde beteekent.

3°. Van twee eindige grootheden A en B, tusschen welke een oneindig klein verschil δ bestaat, mag de eene voor de andere genomen worden.

Immers, zij $A = B + \delta$, dan is

$$\frac{A}{B} = 1 + \frac{\delta}{B}.$$

Derhalve $$\lim.\left(\frac{A}{B}\right) = 1.$$

Bij het bepalen van de limiet der verhouding van die beide grootheden, mogen deze dus als volkomen aan elkander gelijk beschouwd worden.

4°. Indien A en B twee oneindig kleinen van dezelfde orde voorstellen, waarvan het verschil δ eene oneindig kleine van eene hoogere orde is, zal hare verhouding insgelijks de eenheid tot limiet hebben; want men heeft wederom

$$\frac{A}{B} = 1 + \frac{\delta}{B}.$$

Is nu B van de n^e en δ van de $(n+m)^e$ orde, dan kan men, ingevolge de tweede eigenschap, voor $\frac{\delta}{B}$ schrijven ka^m, waarvan de limiet nul is. In dat geval mogen dus die grootheden A en B, bij vergelijking met andere oneindig kleinen van dezelfde orde, als aan elkander gelijk beschouwd worden. Bij omkeering laat zich hieruit tevens de navolgende eigenschap afleiden.

5°. Wanneer de verhouding van twee oneindig kleinen de eenheid tot limiet heeft, zal haar verschil oneindig klein met betrekking tot elke derzelve, en alzoo eene oneindig kleine van eene hoogere orde zijn. Hierbij valt echter op te merken, dat het bedoelde verschil niet altijd eene oneindig kleine van eene onmiddelijk hoogere orde behoeft te wezen. In sommige gevallen kan deze orde twee of meer eenheden hooger zijn dan die van elk der twee grootheden zelven. Zoo zal bijv. het verschil tusschen de tangens en den sinus van eenen oneindig kleinen boog der eerste orde, eene oneindig kleine der derde orde zijn, hetgeen terstond af te leiden is uit de gelijkheid

$$tg\,\varphi - sin.\,\varphi = sin.\,\varphi\left(\frac{1-cos.\varphi}{cos.\varphi}\right) = tg\,\varphi\;sin.\;ver.\;\varphi,$$

waarin de factor *sin. ver.* φ eene oneindig kleine van de tweede orde is.

6°. De limiet van de verhouding tusschen twee oneindig kleinen A en B verandert niet, indien men deze vervangt door twee anderen A' en B' die daarvan verschillen, doch welker verhoudingen tot de beide eerste respectievelijk de eenheid tot limiet hebben, of, hetgeen hetzelfde zegt (n°. 5), indien de verschillen $A'-A$ en $B-'B$, oneindig klein zijn met betrekking tot A en B.

Deze stelling grondt zich onmiddelijk op de navolgende eigenschap der limieten.

De limiet van het product van twee of meer veranderlijke grootheden is gelijk aan het product der limieten, waartoe zij elk in het bijzonder naderen.

Zij kan aldus betoogd worden: Men stelle namelijk

$$P = p\,(1+a)\;, \qquad P_1 = p_1\,(1+a_1)\text{ enz.},$$

waarin a, a_1.. tot nul naderen, dan zijn $p, p_1 p_2$... de limieten der factoren van het product $P.\,P_1..\,P_n$, dat is van

$$p\,p_1..\,p_n\,(1+a)\,(1+a_1)...\,(1+a_n).$$

De ontwikkeling van dat product geeft

$$pp_1...p_n\left\{1+a+a_1...+a_n+\text{etc.}\right\}$$

en heeft blijkbaar tot limiet $pp_1...p_n$, hetgeen te bewijzen was.

Indien nu de verhoudingen $\frac{A'}{A}, \frac{B'}{B}$ de eenheid tot limiet hebben, is zulks ook waar van de omgekeerde verhoudigen $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}$, en daar men voor $\frac{A}{B}$ schrijven kan het product $\frac{A'}{B'}\cdot\frac{B'}{B}\cdot\frac{A}{A'}$, zoo volgt hieruit op grond der voorgaande eigenschap,

$$\lim.\left(\frac{A}{B}\right) = \lim.\left(\frac{A'}{B'}\right)$$

Het spreekt van zelf, dat deze stelling eveneens doorgaat, wanneer slechts eene der twee grootheden A en B op de hier bedoelde wijze door eene andere vervangen wordt.

7°. Heeft men eene uitdrukking bestaande uit de som van eenige grootheden A, B, C, D enz., welke oneindig kleinen van verschillende orden voorstellen, dan zal deze uitdrukking mogen

beschouwd worden als eene oneindig kleine van de laagste der verschillende rangorden, waartoe die grootheden behooren.

Immers, zij $A = ka^n$, $B = k.a^{n+p}$, $C = k_2 a^{n+q}$ enz., dan kan men voor de gemelde som schrijven

$$a^n (k + k_1 a^p + k_2 a^q + \text{enz.})$$

en hare verhouding tot den factor a^n, die eene oneindig kleine van de n^e orde is, zal blijkbaar tot limiet hebben de eindige grootheid k. Al de termen die van eene hoogere orde dan de n^e zijn, mogen hier geheel achterwege blijven, zoodra men slechts ten doel heeft om eindige verhoudingen te bekomen. Op dien grond bijv. beschouwt men dan ook de sinus versus van een' oneindig kleinen boog als eene oneindig kleine van de tweede orde, hoezeer de reeks

$$\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2.3.4.}\varphi^4 + \text{enz.}$$

welke de waarde van *sin. ver.* φ voorstelt tevens hoogere magten van φ dan de tweede bevat.

§ 10. Men zal thans gemakkelijk inzien, dat het achterwege laten van den term ωdx in de vergelijking

$$dy = f_1(x)\, dx + \omega dx,$$

niet gelijk staat met eene verwaarloozing van dien term, even als of men slechts ten oogmerk had eene benaderde waarde van dy te bekomen, maar dat zulks, overeenkomstig den waren zin van de leer der oneindig kleinen, geheel geoorloofd is, omdat hier eeniglijk aangeduid moet worden, dat de verhouding tusschen de differentialen dx, dy meer en meer nadert tot de limiet $f_1(x)$; wordende daarbij tevens ondersteld, dat deze beide oneindig kleinen van dezelfde orde en dus met elkander vergelijkbaar zijn. Indien echter, voor bijzondere waarden van x, de functie $f_1(x)$ nul mogt worden, hetgeen plaats vindt in die punten eener kromme lijn, alwaar de raaklijn aan het punt (x, y) evenwijdig aan de as der x gerigt is, dan kan dy als oneindig klein ten aanzien van dx beschouwd, en dus met eene oneindig kleine van de tweede orde vergeleken worden, als wanneer dy door ωdx te vervangen is. Alleen in geval y eene standvastige grootheid voorstelt, en dus de kromme overgaat in eene regte lijn, evenwijdig aan de as der x, zal dy volstrekt gelijk nul worden, hetgeen trouwens uit den aard der zake volgt, vermits eene standvastige grootheid geene aangroeijing toelaat.

TWEEDE LES.

Regels voor het differentiëren der enkelvoudige en zamengestelde functiën eener enkele veranderlijke grootheid.

§ 11. Onder het *differentiëren* eener functie $y = f(x)$, verstaat men het bepalen der uitdrukking van hare differentiaal dy, indien het veranderlijke element x de oneindig kleine aangroeijing dx ondergaat; of hetgeen op hetzelfde neêrkomt (§ 8), het bepalen van de waarde der afgeleide functie $f_1(x)$, of van het differentiaal quotient der gegevene functie. Na in de vorige les het grondbegrip der differentiaal-rekening of van de leer der oneindig kleinen ontwikkeld te hebben, kunnen wij thans overgaan, tot het opsporen der regels, naar welke de verschillende soorten van algebraische en transcendentale functien moeten gedifferentieerd worden. Het zamenstel dezer regels vormt, hetgeen men noemt, den *Algorithmus* der differentiaal-rekening.

Men zal uit de vergel. (3) § 7 reeds hebben kunnen bemerken, dat de waarde van dy den eersten term voorstelt der uitdrukking voor de eindige differentie Δy, met veranderding tevens van Δx in dx, en dat alzoo de coefficient van dezen eersten term onmiddelijk de afgeleide functie $f_1(y)$ oplevert. Het differentieren eener willekeurige functie van x, komt dus eigenlijk neder op dezen algemeenen regel:

Men vervange x *door* x+dx, *en ontwikkele de overeenstemmende waarde van* y, *in eene reeks volgens de opklimmende magten van* dx, *dan zal de coëfficient van den term met* dx *aangedaan*, *de waarde der afgeleide functie* $f_1(x)$ *doen kennen*; of met andere woorden: *De differentiaal der functie* f(x) *wordt gevonden*, *door in de ontwikkeling van het verschil* $f(x+dx)-f(x)$, *al de termen bevattende de tweede en volgende magten van* dx, *als oneindig kleinen van hoogeren rang achterwege te laten.*

§ 12. Passen wij dezen regel toe op eenige der eenvoudigste algebraische, logarithmische, exponentiale en goniometrische functien, als den grondslag opleverende voor het differentiëren van alle overige meer zamengestelde functien van gelijken aard.

Beschouwen wij te dien einde eerstelijk de functie $y = x^m$, m hierbij een geheel willekeurig getal ondersteld zijnde.

Uit de waarde van y vindt men terstond,

$$\Delta y = (x+\Delta x)^m - x^m$$

dus
$$\Delta y = x^m \left\{ \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1 \right\}$$

Volgens hetgeen in onze *Hoogere Algebra* (24ᵉ les) betoogd is, heeft men voor alle mogelijke positieve of negatieve waarden van m, de ontwikkeling

$$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m = 1 + m\frac{\Delta x}{x} + \frac{m.m-1}{1.2.}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \text{enz.}$$

welke, daar het gebroken $\frac{\Delta x}{x}$ naar welgevallen klein kan aangenomen worden, steeds eene convergerende reeks zal zijn.

Derhalve

$$x^m \left\{ \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1 \right\} = mx^{m-1}\Delta x + \frac{m.m-1}{1.2} x^{m-2}(\Delta x)^2 + \text{enz.}$$

waaruit, naar den hiervoren opgegeven regel, volgt

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) = mx^{m-1},$$

of
$$d.y = d.x^m = mx^{m-1}dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Regel. *De differentiaal eener tot eene standvastige magt verhevene veranderlijke grootheid wordt gevonden door deze magt, na haren exponent met de eenheid verminderd te hebben, te vermenigvuldigen met dien exponent, en vervolgens met de differentiaal der grootheid zelve.*

§ 13. Indien men de ontwikkeling van het binomium van *Newton*, waarop het betoog van den voorgaanden regel gegrond is, slechts als bewezen voor geheele positieve waarden van den exponent wil aannemen, kan men zich van de algemeene geldigheid der form. (1) nog op de volgende wijze verzekeren.

Laat eerstelijk m eene negatieve waarde $-n$ hebben, n hierbij een geheel getal ondersteld zijnde, dan wordt

$$y = \frac{1}{x^n}$$

dus
$$\Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^n} - \frac{1}{x^n}$$

en $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^n(x+\Delta x)^n}\left\{\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\right\}$$

De eerste dezer factoren heeft blijkbaar tot limiet $\frac{1}{x^{2n}}$ en de tweede nx^{n-1}, vermits de aangehaalde formule ondersteld wordt voor geheele positieve waarden van den exponent m geldig te zijn. Wij besluiten dus, ingevolge de in § 9 betoogde eigenschap der limieten,

$$Lim.\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^{2n}}.nx^{n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}} = mx^{m-1}.$$

of $$dy = d.x^m = mx^{m-1}dx\ ,$$

waardoor de form. (1) insgelijks voor geheele negatieve waarden van m bewezen is.

Men stelle thans $y = x^{\frac{p}{q}}$. Hieruit volgt

$$y^q = x^p.$$

Zij z de waarde van elke dezer twee functien, dan zal men, omdat p en q hier geheele positieve of negatieve getallen beteekenen, mogen schrijven

$$dz = qy^{q-1}dy \qquad \text{en } dz = px^{n-1}dx.$$

Derhalve $$qy^{q-1}dy = px^{p-1}dx.$$

welke vergelijking geeft

$$dy = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}dx = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}}dx = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}\ dx,$$

en dus wederom de formule

$$d.x^m = mx^{m-1}.dx$$

oplevert, waarin nu m alle mogelijke getallenwaarden kan hebben.

De hiervoren verkregene formule

$$d.\frac{1}{x^n} = -\frac{n}{x^{n+1}}dx\ , \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

bevat tevens dezen afzonderlijken regel.

De differentiaal van het omgekeerde eener standvastige magt van eene veranderlijke grootheid is, op het negatieve teeken na, gelijk aan het product van den exponent dezer magt met de differentiaal der grootheid zelve, en vervolgens gedeeld door de met de eenheid vermeerderde magt dezer grootheid.

Voor $m = \frac{1}{2}$ geeft de algemeene formule (1)

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

Regel. *De differentiaal van den vierkants wortel uit eene veranderlijke grootheid is gelijk aan de helft van hare differentiaal, gedeeld door dezen vierkantswortel.* Zie hier nog enkele toepassingen der algemeene formules (1), (2).

$$d\,x^5 = 5x^4dx,\quad d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2},\quad d\,\frac{1}{x^7} = -\frac{7dx}{x^8},$$

$$d\sqrt[3]{x^4} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}dx,\quad d\sqrt[7]{x^3} = \frac{3}{7}\frac{dx}{\sqrt[7]{x^4}}$$

$$d\frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x^3}},\quad d\frac{1}{\sqrt[10]{x^7}} = -\frac{7}{10}\frac{dx}{x\sqrt[10]{x^7}}.$$

§ 14. Alvorens tot de behandeling der overige functien over te gaan, zal het noodig zijn eenige algemeene stellingen te betoogen, waarvan bij het differentiëren van zamengestelde functiën menigvuldige toepassing wordt gemaakt.

Indien y uit de som van een willekeurig aantal verschillende functien van x zamengesteld is, zal de differentiaal van y gelijk zijn aan de som der afzonderlijke differentialen van deze functien.

Zij namelijk

$$y = f(x) + F(x) + \varphi(x) + \text{enz.},$$

dan volgt hieruit,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x} + \frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} + \text{enz.}$$

en dus, tot de limieten der afzonderlijke verhoudingen overgaande, komt er

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) + F_1(x) + \varphi_1(x) + \text{enz.}$$

of wel
$$dy = df(x) + dF(x) + d\varphi(x) + \text{enz.}$$

Het is klaar dat onder som hier eene algebraïsche som te verstaan is, vermits eenige dezer functiën ook met het negatieve teeken kunnen aangedaan zijn.

Indien $y = af(x)$ is, de factor a eene standvastige waarde hebbende, zal ook $dy = adf(x)$ zijn, hetgeen terstond af te leiden is uit de vergelijking

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\big(f(x+\Delta x)-fx\big)}{\Delta x}.$$

Elke standvastige factor waarmede eene functie aangedaan is, komt dus op gelijke wijze in hare differentiaal voor.

Door toepassing der beide voorgaande stellingen op de functie

$$y = Ax^m + \frac{B}{x^n} - c\sqrt[p]{x},$$

vindt men terstond

$$dy = \left(Amx^{m-1} - \frac{Bn}{x^{n+1}} - \frac{c}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt[p]{x^{p-1}}}\right) dx.$$

§ 15. Wanneer in de vergelijking $y = F(z)$, het veranderlijke element z tevens eene functie is eener andere veranderlijke grootheid x, zoo dat men heeft $z = f(x)$ en dus $y = F(fx)$, dan wordt y als functie eener functie beschouwd, en hare differentiaal ten aanzien van x als onafhankelijke veranderlijke, laat zich aldus bepalen.

De vergelijking $y = F(z)$ geeft de verhouding

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta x},$$

waarvoor men insgelijks kan schrijven,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Tot de limieten van elk lid dezer vergelijking overgaande, komt er

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx},$$

dus $$dy = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot dx = F_1(z) f_1(x)\, dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Deze formule wordt met vrucht aangewend bij het differentiëren van zamengestelde functien. Zij b. v.

$$y = A\sqrt[p]{\left(ax^n + \frac{b}{x^m}\right)^q}.$$

Stellende hierin $ax^n + \frac{b}{x^m} = z$, en dus $y = A\sqrt[p]{z^q}$,

dan is $$\frac{dy}{dz} = A\frac{q}{p} z^{\frac{q}{p}-1},$$

wijders $$\frac{dz}{dx} = nax^{n-1} - \frac{mb}{x^{m+1}},$$

Derhalve

$$dy = \frac{Aq}{p}\left(ax^n + \frac{b}{x^m}\right)^{\frac{q}{p}-1}\left(nax^{n-1} - \frac{mb}{x^{m+1}}\right) dx.$$

De gevondene form. (3) leert ons tevens dat men elke differentiaal betrekking

$$dy = \frac{dy}{dz} dz$$

tusschen twee veranderlijken grootheden y, z, van toepassing kan maken op het geval, waarin z functie eener nieuwe veranderlijke x wordt, door slechts voor den differentiaal factor dz te schrijven het product $\frac{dz}{dx}.dx$.

Veronderstellen wij thans dat men uit eenige functie $y = F(z)$ bij omkeering afgeleid hebbe $z = f(y)$, dan zal men, volgens het voorgaande, mogen schrijven

$$dy = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot dy.$$

Derhalve
$$\frac{dy}{dz} = F_1(z) = \frac{1}{\frac{dz}{dy}} = \frac{1}{f_1(y)},$$

en
$$\frac{dz}{dy} = f_1(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dz}} = \frac{1}{F_1(z)},$$

zoodat bij de omkeering eener functie, de nieuwe differentiaalverhouding ook het omgekeerde der aanvankelijke wordt.

Heeft men bijv. uit $y = x^n$ reeds gevonden $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, dan zal, voor de omgekeerde betrekking $x = \sqrt[n]{y}$, waarin nu x als functie van y voorkomt, het differentiaal quotient $\frac{dx}{dy}$ tot waarde hebben

$$\frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{ny^{1-\frac{1}{n}}}, \quad \text{dus} \quad dx = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} dy.$$

§ 16. Laten X en X_1 functien van x zijn, en $y = XX_1$ gesteld worden, dan heeft men de differentiaal betrekking

$$dy = XdX_1 + X_1dX.$$

Om zulks te bewijzen, merke men op, dat bij den overgang van x in $x + dx$, X en X_1 insgelijks met hare differentialen aangroeijen, en alzoo veranderen in $X + dX$ en $X_1 + dX_1$; derhalve komt er

$$dy = (X + dX)(X_1 + dX_1) - XX_1 = XdX_1 + X_1dX + dXdX_1,$$

en dus met weglating van den laatsten term, die als oneindig klein ten opzigte der beide voorgaande te beschouwen is,

$$dy = d(XX_1) = XdX_1 + X_1dX \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Deze uitkomst leidt tot den volgenden regel:

De differentiaal van het product van twee functien, is gelijk aan de som der producten van elke derzelve met de differentiaal der andere.

Schrijft men de formule (4) onder dezen vorm

$$\frac{dy}{y}=\frac{d(XX_1)}{XX_1}=\frac{dX}{X}+\frac{dX_1}{X_1},$$

dan laat zij zich gemakkelijk op het differentiëren van een product van drie of meer functien uitbreiden.

Immers, de functie X_1 door het product X_1X_2 vervangende, vindt men, op grond der voorgaande formule,

$$\frac{d(XX_1X_2)}{XX_1X_2}=\frac{dX}{X}+\frac{d(X_1X_2)}{X_1X_2}=\frac{dX}{X}+\frac{dX_1}{X_1}+\frac{dX_2}{X_2}.$$

Derhalve

$$d(XX_1X_2)=X_1X_2dX+XX_2dX_1+XX_1dX_2.$$

Op gelijke wijze voortgaande, zal men voor een product van een willekeurig aantal functien, bekomen,

$$\frac{d(XX_1X_2\ldots X_n)}{XX_1X_2\ldots X_n}=\frac{dX}{X}+\frac{dX_1}{X_1}+\ldots\frac{dX_n}{X_n}.$$

Men leidt hieruit dezen algemeenen regel af.

De differentiaal van het product van een willekeurig aantal n *functien, wordt gevonden door de differentiaal van elk derzelven te vermenigvuldigen met het product der* n—1 *overige functien, en deze uitkomsten vervolgens bij elkander op te tellen.*

Voor $X_2=a$ zijnde eene standvastige, verandert de form. (4) in

$$d.aX=adX,$$

hetgeen met het reeds in § 14 gevondene overeenstemt.

§ 17. Indien $y=\frac{X}{X_1}$ is, zal men hebben

$$dy=d\left(\frac{X}{X_1}\right)=\frac{X_1dX-XdX_1}{X_1^2}\quad\ldots\ldots\ (5)$$

Om hiertoe te geraken kan men aldus te werk gaan. Men geve aan y den vorm van het product $X\times\frac{1}{X_1}$, dan volgt uit den hiervoren betoogden regel voor het differentiëren van een product,

$$dy=Xd\left(\frac{1}{X_1}\right)+\frac{1}{X_1}dX=-\frac{XdX_1}{X_1^2}+\frac{dX}{X_1}.$$

Derhalve

$$dy=d\left(\frac{X}{X_1}\right)=\frac{X_1dX-XdX_1}{X_1^2}.$$

Hierin ligt de navolgende regel opgesloten:

De differentiaal van eenig gebroken wordt gevonden door het product van den noemer met de differentiaal des tellers, te verminderen met het product van den teller met de differentiaal des noemers, en dat verschil te deelen door het vierkant van den noemer.

Men kan deze uitkomst ook aldus verkrijgen:

Uit $y = \frac{X}{X_1}$ volgt $X = X_1 y$, en dus, na differentiatie van beide leden dezer vergelijking,

$$dX = X_1 dy + y dX_1.$$

Derhalve $$dy = \frac{dX - y dX_1}{X_1} = \frac{dX - \frac{X}{X_1} dX_1}{X_1},$$

of $$dy = \frac{X_1 dX - X dX_1}{X_1^2}, \text{ even als hiervoren.}$$

Voorbeelden ter toepassing.

1°. Zij $$y = (x+a) \sqrt{(x^2 - b^2)}.$$

$$dy = \frac{(x+a)\, x dx}{\sqrt{(x^2 - b^2)}} + (\sqrt{(x^2 - b^2)}\, dx = \frac{2x^2 + ax - b^2}{\sqrt{(x^2 - b^2)}} dx,$$

2°. $$y = (x+a)(x+b)(x+c).$$

$$dy = \{(x+a)(x+b) + (x+a)(x+c) + (x+b)(x+c)\} dx,$$

of, na ontwikkeling

$$dy = (3x^2 + 2(a+b+c)x + ab + ac + bc)\, dx.$$

3°. $$y = \frac{x^2 + a}{x^2 - a}.$$

$$dy = \frac{2(x^2 - a)\, x dx - 2(x^2 + a)\, x dx}{(x^2 - a)^2} = -\frac{4axdx}{(x^2 - a)^2}$$

4°. $$y = \sqrt{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)} = \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

of $$dy = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{x+a}{x-a}\right),$$

$$dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}\left(\frac{(x-a)\, dx - (x+a)\, dx}{(x-a)^2}\right) = \frac{-adx}{(x-a)\sqrt{(x^2 - a^2)}}.$$

Met behulp der voorgaande regels laten zich thans de differentialen vinden van alle soorten van algebraïsche functien, zoo als later meer in het bijzonder blijken zal.

§ 18. Onder de transcendentale functien komt in de eerste plaats in aanmerking de functie

$$y = log.x.$$

Deze geeft voor de verhouding der gelijktijdige eindige differentien,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{log.(x+\Delta x) - log.x}{\Delta x}$$

$$= \frac{log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{log.(1+a)}{a};$$

zijnde namelijk hierin de breuk $\frac{\Delta x}{x} = a$ gesteld.

Door ontwikkeling van $log.(1+a)$ in de bekende reeks (*Hoogere Algebra* § 244)

$$M\left(a - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}a^3 - \text{enz}\right),$$

welke voor $a < 1$ steeds convergent is, besluit men terstond dat, voor oneindig kleine waarden van a, de verhouding $\frac{log.(1+a)}{a}$ tot limiet heeft den modulus M van het logarithmen stelsel waartoe y behoort, zoo dat $\frac{dy}{dx} = \frac{M}{x}$ wordt.

Dezelfde uitkomst verkrijgt men insgelijks door voor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ te schrijven $\frac{1}{x}\, log.(1+a)^{\frac{1}{a}}$. Immers, voor oneindig kleine waarden van a is, de limiet van $(1+a)^{\frac{1}{a}} = e$. (*Hoogere Algebra* § 243).

Derhalve $$\frac{dy}{dx} = \frac{log.e}{x} = \frac{M}{x}.$$

Men heeft mitsdien voor de gezochte differentiaal

$$dy = d\,log.x = \frac{Mdx}{x}, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

waaruit deze regel voortvloeit.

De differentiaal van den logarithmus eener veranderlijk grootheid is gelijk aan den modulus gedeeld door deze grootheid, en vermenigvuldigd met hare differentiaal.

Voor $y = l(x)$, zijnde de letter l hier en in het vervolg gebruikt tot aanwijzing van den Neperiaanschen logarithmus, gaat de voorgaande uitkomst over in

$$dy = \frac{dx}{x}.$$

Heeft men $y = log.ax = log.a + log.x$, dan is, indien a eene standvastige beteekent,

$$dy = d\,log.x = \frac{Mdx}{x},$$

zoodat bij deze differentiatie de standvastige a geheel verdwijnt.

§ 19. Het zoo even gevondene leidt onmiddelijk tot de differentiaal der exponentiale functie

$$y = a^x,$$

waarin a eene standvastige voorstelt. Men heeft hieruit bij omkeering:

$$x = \frac{l(y)}{l(a)}$$

dus, volgens form. (6)

$$dx = \frac{dy}{y\,l(a)}$$

en

$$\frac{dy}{dx} = y\,l(a) = a^x\,l(a)$$

of

$$dy = d.a^x = a^x\,l(a)\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Regel. *De differentiaal eener veranderlijke magt van eene standvastige grootheid is gelijk aan die magt vermenigvuldigd met den Nep. logarithmus dezer grootheid en met de differentiaal van den exponent.*

In het bijzonder geval van $a = e$, heeft men

$$d.e^x = e^x\,dx.$$

Het zal niet onnuttig zijn hier aan te toonen, dat de form. (6) tevens dienen kan om daaruit de differentiaal van x^m, m eene standvastige zijnde, zoo mede de differentiaal van het product van een zeker aantal veranderlijke grootheden af te leiden.

Uit de vergelijking $y = x^m$ volgt namelijk voor alle mogelijke waarden van m,

$$l(y) = m\,l(x).$$

Van beide leden dezer vergelijking de differentiaal nemende komt er

$$\frac{dy}{y} = m\frac{dx}{x}.$$

Derhalve $$dy = \frac{my}{x} dx = mx^{m-1} dx.$$

Even zoo volgt uit de vergelijking

$$y = XX_1X_2 \ldots X_n$$

$$l(y) = l(X) + l(X_1) + \ldots l(X_n).$$

Derhalve

$$\frac{dy}{y} = \frac{dX}{X} + \frac{dX_1}{X_1} + \ldots \frac{dX_n}{X_n}$$

zoo als reeds hiervoren (§ 16) gevonden is.

Op gelijke wijze geraakt men tot de differentiaal der exponentiale functie

$$y = x^z$$

waarin z eene functie van x aanduidt.

Tot de logarithmen overgaande, en vervolgens naar de regels van §§ 16 en 18 differentiërende, bekomen wij

$$l(y) = z\, l(x),$$

$$\frac{dy}{y} = l(x) dz + z \frac{dx}{x}.$$

Derhalve

$$dy = d.x^z = x^z\, l(x)\, dz + zx^{z-1} dx,$$

$$= (x^z\, lx \frac{dz}{dx} + zx^{z-1}) dx.$$

In het bijzonder geval van $z = x$, verandert de voorgaande uitkomst in deze

$$d.x^x = x^x \left(l(x) + 1 \right) dx.$$

Om de functie $z = x^y y^x$ te differentiëren, heeft men, denzelfden weg als hiervoren inslaande,

$$l(z) = y\, l(x) + x\, l(y),$$

$$\frac{dz}{z} = y \frac{dx}{x} + l(x)\, dy + x \frac{dy}{y} + l(y)\, dx,$$

dus $$d.x^y y^x = x^y y^x \left\{ \left(\frac{y}{x} + (ly) \right) dx + \left(\frac{x}{y} + l(x) \right) dy \right\}$$

waarin nu, indien x de onafhankelijke veranderlijke is, dy door $\frac{dy}{dx}.dx$ kan vervangen worden.

Als toepassingen der formules (6) en (7) kunnen nog de navolgende voorbeelden dienen:

1°.
$$y = log.(x+\sqrt{(a^2+x^2)}).$$

$$dy = \frac{M\left\{(dx+\frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\right\}}{x+\sqrt{(a^2+x^2)}}$$

$$dy = \frac{Mdx}{\sqrt{(a^2+x^2}}$$

2°.
$$x = log.\sqrt[q]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^p}.$$

Ten einde het differentiëren dezer functie gemakkelijker te maken, schrijve men haar onder den vorm

$$y = \frac{p}{q}\left\{log.(a+x) - log.(a-x)\right\},$$

dan komt er,

$$dy = \frac{p}{q}\left\{\frac{Mdx}{a+x} + \frac{Mdx}{a-x}\right\}.$$

$$dy = \frac{2\,a\,p\,M\,dx}{q(a^2-x^2)}$$

3°.
$$y = l\left\{\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}-(\sqrt{1-x})}\right\}:$$

Na teller en noemer van dat gebroken met den teller vermenigvuldigd te hebben, verandert deze functie in

$$y = l\left(\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right).$$

$$dy = dl(1+\sqrt{(1-x^2)} - dl(x)$$

of
$$dy = \frac{\frac{-xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}}{1+\sqrt{(1-x^2}} - \frac{dx}{x} = \frac{-dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}.$$

4°.
$$y = a^{(bx)}.$$

$$dy = a^{(b^x)}l(a)d.(b^x) = a^{(b^x)}b^x l(a)l(b)\,dx.$$

5°.
$$y = a^{log.\,x}.$$

$$dy = Ma^{log.\,x}l(a)\frac{dx}{x}.$$

§ 20. Tot de enkelvoudige goniometrische functien behoort in de eerste plaats

$$y = sin. x.$$

De verhouding der eindige differentiën van y en x, is hier

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sin.(x+\Delta x) - sin.\,x.}{\Delta x}$$

Om de limiet dezer verhouding te bekomen kan men, zonder daartoe eene ontwikkeling in eene reeks volgens de magten van Δx te gebruiken, het voorgaande gebroken, op grond der bekende goniometrische formule

$$sin.\,\alpha - sin.\,\beta = 2\,sin.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

ook onder dezen vorm schrijven,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sin.\,\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\,cos.\,(x+\tfrac{1}{2}\Delta x).$$

Daar nu, Δx tot nul naderende, de eerste factor tot limiet heeft de eenheid (§ 8), en de tweede alsdan tot $cos.\,x$ nadert, zoo volgt hieruit onmiddelijk voor de begeerde differentiaal

$$dy = d.\,sin. x = cos. x\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

waarin nu dx, even als dy, ondersteld wordt in deelen van den straal uitgedrukt te zijn.

Men zoude hierbij ook van de navolgende redenering hebben kunnen gebruik maken, welke meer onmiddelijk op de leer der oneindig kleinen steunt.

Omdat $$y+dy = sin.\,(x+dx)$$
kan gesteld worden, heeft men

$$dy = sin.\,(x+dx) - sin.\,x. = cos. x\,sin dx + (cos. dx - 1)\,sin.\,x$$
$$= cos.\,x sin.\,dx - sin.\,x sin.\,vers. dx.$$

De tweede term eene oneindig kleine van de tweede orde zijnde, en $sin. dx$ door den boog dx zelven kunnende vervangen worden (§ 9), zoo besluit men hieruit onmiddelijk,

$$dy = cos. x dx$$

ons leerende dat *de differentiaal van de sinus eens boogs, tot waarde heeft het product van zijn' cosinus met de differentiaal des boogs.*

Voor positieve waarden van dx, zal dy insgelijks positief zijn, en dus de sinus te gelijk met den boog x toenemen, zoo lang deze

tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$ gelegen is, terwijl het tegenovergestelde zal plaatsvinden zoowel voor alle waarden van x begrepen tusschen $\frac{\pi}{2}$ en π, als voor die, welke tusschen π en $\frac{3\pi}{2}$ zijn gelegen. In dit laatste geval nogtans wordt de sinus zelf negatief, en is aan de negatieve zijde toenemende. Voor waarden van x tusschen $\frac{3\pi}{2}$ en 2π, zal daarentegen de sinus aan de negatieve zijde eene positieve aangroeijing verkrijgen; hetgeen alles uit de beschouwing eener figuur bevestigd wordt.

§ 21. De form. (8) kan tot grondslag strekken bij het bepalen der differentialen van al de overige goniometrische functien, zoo als wij thans zullen doen zien.

Door eerstelijk in deze formule $\frac{\pi}{2} - x$ voor x te schrijven, gaat zij over in

$$y = \sin.(\frac{\pi}{2} - x) = \cos. x$$

dus
$$dy = d.\cos.x = \sin.x.\, d(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin.x\, dx \quad . \quad . \quad . (9)$$

Het negatieve teeken waarmede deze differentiaal aangedaan is, toont van zelf aan, dat de cosinus van elken boog begrepen tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$, of tusschen $\frac{\pi}{2}$ en π, aan de positieve zijde afneemt, of aan de negatieve zijde toeneemt, indien de boog aangroeit; terwijl het tegengestelde plaats vindt voor boogen tusschen π en $\frac{3\pi}{2}$, of tusschen $\frac{3\pi}{2}$ en 2π gelegen.

De form. (9) leert ons dat *de differentiaal van den cosinus eens boogs gelijk is aan het product van zijnen sinus met de differentiaal des boogs negatief genomen.*

Differentiëren wij thans de formule

$$tgx = \frac{\sin.x}{\cos.x}$$

naar den regel van § 17, dan verkrijgen wij, met toepassing van het hiervoren gevondene,

$$d.\,tg\,x = \frac{\cos.x.\cos.x\,dx + \sin.x\,\sin.x\,dx}{\cos.^2 x}$$

of
$$d.\,tg\,x = \frac{dx}{\cos.^2 x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (10)$$

en door hierin $\frac{\pi}{2} - x$ voor x te schrijven, komt er

$$d.\,cot.\,x = -\frac{dx}{sin.^2 x} \quad \text{. . . . . (11)}$$

waaruit wij nog de twee navolgende regels afleiden.

De differentiaal van de tangens eens boogs is gelijk aan de differentiaal des boogs, gedeeld door het vierkant van den cosinus van dezen boog.

De differentiaal van de cotangens eens boogs is gelijk aan de differentiaal des boogs negatief genomen, gedeeld door het vierkant van den sinus van dezen boog.

Wijders geven de formules

$$sec.\,x = \frac{1}{cos.x}, \qquad cosec.\,x = \frac{1}{sin.x},$$

terstond

$$d\,sec.x = \frac{sin.\,xdx}{cos.^2 x}, \qquad d\,cosec.\,x = \frac{-cos.\,xdx}{sin.^2 x},$$

dat is in woorden:

De differentiaal van de secans eens boogs, is gelijk aan het product van zijnen sinus met de differentiaal des boogs, en gedeeld door het vierkant van den cosinus van dezen boog.

De differentiaal van de cosecans eens boogs, is gelijk aan het product van zijnen cosinus met de differentiaal des boogs negatief genomen, en gedeeld door het vierkant van den sinus van dezen boog.

Wij hebben daarenboven nog de differentiaal formules,

$$d.sin.vers.\ x = d\,(1-cos.x) = sin.\,xdx$$
$$d.cos.vers.\ x = d\,(1-sin.x) = -cos.\,xdx$$
$$d.koorde\ x = d.2sin.\tfrac{1}{2}x = cos.\,\tfrac{1}{2}\,xdx.$$

§ 22. Gaan wij thans tot de omgekeerde goniometrische functien over, waarbij namelijk de boog in functie der goniométrische lijnen wordt uitgedrukt.

Beschouwen wij in de eerste plaats de functie

$$y = B.\,sin.\,x,$$

waaruit volgt

$$x = sin.\,y,$$

dus

$$dx = cos.y\,dy = \sqrt{(1-x^2)}dy.$$

Derhalve

$$dy = dB.\,sin.\,x = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}. \quad \text{. . . . . . . (12)}$$

Omdat $B.cos\,x = \frac{\pi}{2} - B\,sin\,x$, volgt uit de voorgaande uitkomst onmiddellijk

$$d.B\,cos.x = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

De functie $y = B\,tg\,x$ geeft

$$tg\,y = x$$

dus

$$\frac{dy}{cos.^2 y} = dx$$

en

$$dy = dx\,cos.^2 y = \frac{dx}{1+tg^2 y}.$$

Derhalve

$$dB\,tg\,x = \frac{dx}{1+x^2} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Daar nu ook

$$B.\,cot.\,x = \frac{\pi}{2} - B\,tg\,x,$$

heeft men terstond

$$dB.cot.x = -\frac{dx}{1+x^2} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Wijders geeft de functie

$$y = B\,sec.\,x.$$

$$sec.\,y = x,$$

dus

$$\frac{sin.\,y\,dy}{cos.^2 y} = dx,$$

en

$$dy = dx\frac{cot.\,y}{sec.\,y} = \frac{dx}{tg.y\,sec.\,y},$$

Derhalve $$d.B\,sec.\,x = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

waaruit volgt $$dB.\,cosec.\,x = \frac{-dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

Eindelijk hebben wij nog

$$y = B\,sin\,vers.\,x$$

$$x = sin\,vers.\,y$$

dus $$dx = sin.y\,dy$$

en $$dy = \frac{dx}{sin.y} = \frac{dx}{\sqrt{(1 - cos.^2 y)}}$$

dat is $$dB\,sinver.\,x = \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Op gelijke wijze vindt men,

$$dB\,cos.\,vers.\,x = \frac{-dx}{\sqrt{(2x - x^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Uit al de voorgaande formules laat zich nu gemakkelijk het navolgende algemeene overzigt van de differentialen der meest eenvoudige goniometrische functien zamenstellen.

$$d.\,sin.\,nx = n\,cos.\,nx\,dx \qquad d.\,sec.\,nx = \frac{n\,sin.nx\,dx}{cos.^2 nx}$$

$$d.\,cos.\,nx = -n\,sin.nx\,dx \qquad d.\,cosec.\,nx = \frac{-n\,cos.\,nx\,dx}{sin.^2\,nx}$$

$$d.\,tg.\,nx = \frac{n\,dx}{cos.^2\,nx} \qquad d.\,sinv.\,nx = n\,sin.\,nx\,dx$$

$$d.\,cot.\,nx = \frac{-ndx}{sin.^2 nx} \qquad d.\,koorde\,nx = n\,cos.\,\frac{nx}{2}\,dx$$

$$d.B\,sin.\,\frac{x}{r} = \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

$$dB\,cos.\,\frac{x}{r} = \frac{-dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

$$d.B\,tg.\,\frac{x}{r} = \frac{rdx}{r^2 + x^2}$$

$$dB\,cot.\,\frac{x}{r} = \frac{-rdx}{r^2 + x^2}$$

$$dB\,sec.\,\frac{x}{r} = \frac{rdx}{x\sqrt{(x^2 - r^2)}}$$

$$dB\,cosec.\,\frac{x}{r} = \frac{-rdx}{x\sqrt{(x^2 - r^2)}}$$

$$dB\,sinv.\,\frac{x}{r} = \frac{dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$dB\,cos.v.\,\frac{x}{r} = \frac{-dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$dB\,koorde\,\frac{x}{r} = \frac{2dx}{\sqrt{(4r^2 - x^2)}}$$

§ 23. Behalve de goniometrische functien, heeft men nog de logarithmen dezer functien te beschouwen, welker differentialen wij hier laten volgen.

$$d\,log.sin.\,x = \frac{Md\,sin.\,x}{sin.\,x} = M\,cot.\,xdx.$$

$$d\,log.\,cos.\,x = \frac{M dcos.\,x}{cos.\,x} = -Mtg.\,xdx.$$

$$d\,log.tg\;x = \frac{M\;dtg\;x}{tg\,x} = \frac{M\,dx}{sin.x\,cos.\,x}.$$

$$d\;log.cot.\,x = -d\,log.\,tg\,x = \frac{-M\,dx}{sin.\,x\,cos.\,x}.$$

$$d\;log.\,sec.\,x = -d\,log.cos.x = M\,tg\,xdx.$$

$$d\,log.cosec.x = -d\,log.sin.x = -M\,cot.\,xdx.$$

$$d\,log.\,sinvers.\,x = \frac{M\,d\,sinv.\,x}{sinv.\,x} = \frac{M\,sin.\,xdx}{1-cos.x} = M\,cot.\,\tfrac{1}{2}\,xdx.$$

$$d\,log.cos.vers.x = \frac{M\,d\,cos.\,vers.\,x}{cos.\,vers.\,x} = \frac{-M\,cos.\,xdx}{1-sin.\,x} = -M\,tg\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}x)\,dx.$$

$$d\,log.\,koorde\,x = \frac{M\,d\,koorde\,x}{koorde\,x} = \frac{M}{2}\,cot.\tfrac{1}{2}\,xdx.$$

§ 24. De onbestaanbare functien eindelijk verdienen mede afzonderlijk in overweging genomen te worden.

Deze altijd tot den vorm $y = P + Q\sqrt{-1}$ kunnende gebragt worden, waarin P en Q willekeurige functien van het veranderlijke element x voorstellen, zoo heeft men voor de betrekking der eindige differentiën

$$\Delta y = \Delta P + \sqrt{-1}\Delta Q$$

dus

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta P}{\Delta x} + \sqrt{-1}\,\frac{\Delta Q}{\Delta x}.$$

Bij het overgaan tot de limieten der voorgaande verhoudingen, verkrijgt men

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{dQ}{dx}.$$

Derhalve

$$dy = dP + \sqrt{-1}\,dQ,$$

ten blijke dat men bij het differentiëren van onbestaanbare grootheden, den factor $\sqrt{-1}$, even als eenen bestaanbaren standvastigen factor kan behandelen.

De waarheid hiervan laat zich onder anderen bevestigen door het differentiëren der functie x^2+y^2, wanneer deze in hare onbestaanbare factoren $x+y\sqrt{-1}$, $x-y\sqrt{-1}$ gesplitst wordt. Men heeft als dan, naar den regel van § 16:

$$d(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1}) = (x+y\sqrt{-1})(dx-dy\sqrt{-1})$$
$$+(x-y\sqrt{-1})(dx+dy\sqrt{-1})$$
$$=(x+y\sqrt{-1}+x-y\sqrt{-1})dx+(x-y\sqrt{-1}-x-y\sqrt{-1})dy\sqrt{-1}$$

$=2xdx+2ydy$, welke uitkomst men eveneens door regtstreeksche toepassing der form. (1) op de gegevene functie, zoude gevonden hebben.

§ 25. Na in de voorgaandene §§ de onderscheidene regels betoogd te hebben, naar welke de verschillende soorten van functien gedifferentiëerd worden, achten wij het thans niet overbodig, ten slotte dezer les eenige voorbeelden op te geven, door welker bewerking men zich in de toepassing der bedoelde regels verder zal kunnen oefenen, en hierdoor de zoo noodzakelijke vaardigheid verkrijgen in het differentiëren van zamengestelde functien. Te dien einde zullen wij bij de hierna volgende functien eeniglijk de uitkomsten der differentiatien mededeelen.

ALGEBRAÏSCHE FUNCTIEN.

Voorbeelden:	*Uitkomsten:*
1°. $y=\sqrt{(a+bx+cx^2)}$.	$dy=\frac{b+2cx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$.
2°. $y=n\sqrt[p]{(x^m+a)^q}$.	$dy=\frac{nmq}{p}x^{m-1}\sqrt[p]{(x^m+a)^{q-p}}dx$.
3°. $y=b+\sqrt{\{r^2-(x-a)^2\}}$.	$dy=\frac{-(x-a)dx}{\sqrt{\{r^2-(x-a)^2\}}}$.
4°. $y=\sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}-\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}$.	$dy=\frac{2a^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.
5°, $y=\left(\frac{a+x}{x}\right)\sqrt{(b^2-x^2)}$.	$dy=-\frac{(ab^2+x^3)dx}{x^2\sqrt{(b^2-x^2)}}$.
6°. $y=\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{x-\sqrt{(x^2-a^2)}}$.	$dy=\frac{2\{x+\sqrt{(x^2-a^2)}\}^2dx}{a^2\sqrt{(x^2-a^2)}}$.
7°. $y=\frac{2a+bx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$.	$dy=\frac{(b^2-4ac)dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}$.
8°. $y=\sqrt[3]{(x^2+a^2\sqrt{(x^2+a)^2})}$.	$dy=\frac{(2x\sqrt{(x^2+a^2)}+a^2)xdx}{3\sqrt{(x^2+a^2)}\sqrt[3]{(x^2+a^2\sqrt{(x^2+a^2)})^2}}$.

TRANSCENDENTALE FUNCTIEN.

Voorbeelden.	*Uitkomsten.*
1°. $y = log. \sqrt{(a+bx+cx^2)}$.	$dy = M \frac{(\frac{1}{2}b+cx)\, dx}{a+bx+cx^2}$.
2°. $y = log. \sqrt[p]{\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)^q}$.	$dy = \frac{2abq}{p} \frac{M\, dx}{a^2-b^2x^2}$.
3°. $y = log. (x+\sqrt{(x^2-a^2)}$.	$dy = \frac{M\, dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$.
4. $y = l. \{ b+2cx+2\sqrt{c(a+bx+cx^2)} \}$	$dy = \frac{\sqrt{c}dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$.
5. $y = l. \{ \sqrt{b(a'+b'x)}+\sqrt{b'(a+bx)} \}^2$	$dy = \frac{\sqrt{bb'}.dx}{\sqrt{(a+bx)(a'+b'x)}}$.
6. $y = l. \left\{ \frac{2cx-b+\sqrt{(4ac+b^2)}}{2cx-b-\sqrt{(4ac+b^2)}} \right\}$.	$dy = \frac{\sqrt{(4ac+b^2)}\, dx}{a+bx-cx^2}$.
7. $y = l. \left\{ \frac{a\, sin.\varphi - b\, cos.\varphi}{a\, sin.\varphi + b\, cos.\varphi} \right\}$.	$dy = \frac{2abd\varphi}{a^2 sin.^2\varphi - b^2 cos.^2\varphi}$.
8. $y = l. \left\{ \frac{b\sqrt{(a^2-x^2)}+x\sqrt{(a^2-b^2)}}{b\sqrt{(a^2-x^2)}-x\sqrt{(a^2-b^2)}} \right\}^{\frac{1}{2}}$	$dy = \frac{b\sqrt{(a^2-b^2)}\, dx}{(b^2-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}}$.
9. $y = log. \left\{ \frac{x\sqrt{(a-1)}+\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-ax^2)}} \right\}$.	$dy = \frac{\sqrt{(a-1)}dx}{(1-ax^2)\sqrt{(1-x^2)}}$.
10. $y = l. \left\{ \frac{\sqrt{a(x+b)}-\sqrt{b(x+a)}}{\sqrt{x}} \right\}^2$.	$dy = \frac{\sqrt{ab}.dx}{x\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.
11. $y = l. \left\{ \frac{\sqrt{(c-b)(x-a)}-\sqrt{(c-a)(x-b)}}{\sqrt{(c-x)}} \right\}^2$.	$dy = \frac{\sqrt{(c-a)(c-b)}dx}{(c-x)\sqrt{(x-a)(x-b)}}$.
12. $y = l. \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) + \frac{l.(1-x)}{\sqrt{x}}$.	$dy = \frac{-\, l.\, (1-x)dx}{2x\sqrt{x}}$.
13. $y = a^{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$.	$dy = a^{\alpha+\beta x+\gamma x^2}(\beta+2\gamma x)l(a)dx$.
14. $y = \frac{sin.\, (\alpha+\varphi)}{sin.\, (\alpha-\varphi)}$.	$dy = \frac{sin.\; 2\, \alpha\, d\varphi}{sin.^2(\alpha-\varphi)}$.
15. $y = a\, sin. \frac{ax}{\sqrt{(1-a^2x^2)}}$.	$dy = a^2\, cos. \frac{ax}{\sqrt{(1-a^2x^2)}} \frac{dx}{\sqrt{(1-a^2x^2)^3}}$
16. $y = A\, sin.^2\varphi + B\, cos.^2\varphi$.	$dy = 2(A-B)sin.\varphi cos.\varphi d\varphi = (A-B)sin.2\varphi d\varphi$.
17. $y = \varphi^n\, sin.^m\, \varphi$.	$dy = \varphi^{n-1}sin.^{m-1}\varphi\, (m\varphi cos.\varphi + n\, sin.\varphi)d\varphi$.
18. $y = sin.^m\varphi\, cos.^n\varphi$.	$dy = sin.^{m-1}\varphi cos.^{n-1}\varphi(m\, cos.^2\varphi - n\, sin.^2\varphi)d\varphi$.

Voorbeelden.	*Uitkomsten.*
19. $y = \frac{(\alpha+\varphi)\, sin.\,(\beta+\varphi)}{(\beta+\varphi)\, sin.\,(\alpha+\varphi)}$.	$dy = \frac{\{(\alpha+\varphi)(\beta+\varphi) sin.(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta) sin.(\alpha+\varphi)(sin.\beta+\varphi)\}\, d\varphi}{(\beta+\varphi)^2\, sin.^2(\alpha+\varphi)}$
20. $y = l.\left\{\frac{b+a\, cos.\varphi + \sqrt{(b^2-a^2)}.sin.\varphi}{a+b\, cos.\,\varphi}\right\}$.	$dy = \frac{\sqrt{(b^2-a^2)}\, d\varphi}{a+b\, cos.\,\varphi}$.
21. $y = B\, sin.\,(1-x^2)$.	$dy = \frac{-2\, dx}{\sqrt{(2-x^2)}}$.
22. $y = B\, sin.\, 2x\sqrt{(1-x^2)}$.	$dy = \frac{2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$.
23. $y = B\, cos.\, \frac{a-x}{a+x}$.	$dy = \frac{\sqrt{a}\, dx}{(a+x)\sqrt{x}}$.
24. $y = B\, tg.\, \frac{x}{1-x}$.	$dy = \frac{dx}{1-2x+2x^2}$.
25. $y = B\, cot.\, \frac{a+x}{a-x}$.	$dy = \frac{-adx}{a^2+x^2}$.
26. $y = B\, sinvers.\, 2\, cos.\,\varphi$.	$dy = -d\varphi\sqrt{(1+sec.\,\varphi)}$.
27. $y = B\, tg.\, \sqrt{\left(\frac{a}{1-a}\right)}\, cos.\,\varphi$.	$dy = \frac{\sqrt{a(1-a)}\, sin.\,\varphi d\varphi}{a\, sin.^2\varphi - 1}$.
28. $y = B\, cos.\left(\frac{a\, cos.\,\varphi+b}{a+b\, cos.\,\varphi}\right)$.	$dy = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}d\varphi}{a+b\, cos.\,\varphi}$.
29. $y = B\, tg.\, \sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}.\, tg.\, \frac{1}{2}\,\varphi$.	$dy = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}d\varphi}{2(a+b\, cos.\,\varphi)}$.
30. $y = B\, tg.\, \sqrt{\left(\frac{a+b}{a+c}\right)}.\, tg.\,\varphi$.	$dy = \frac{\sqrt{(a+b)(a+c)}\, d\varphi}{a+b\, sin.^2\varphi + c\, cos.^2\varphi}$.
31. $y = B\, cos.\, \frac{b\sqrt{(a^2-x^2)}}{a\sqrt{(b^2-x^2)}}$.	$dy = \frac{b\sqrt{(b^2-a^2)}dx}{(b^2-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}}$.
32. $y = B\, tg.\sqrt{\frac{a(x-b)}{b(x+a)}}$.	$dy = \frac{\sqrt{ab}\,.\, dx}{2\, x\sqrt{(x+a)(x-b)}}$.
33. $y = B\, tg.\, \sqrt{\left(\frac{a+x}{b-x}\right)}$.	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{(a+x)\; b-x)}}$.
34. $y = B\, tg.\, \sqrt{\frac{(c-b)\,(x-a)}{(c-a)\,(b-x)}}$.	$dy = \frac{\sqrt{(c-a)\,(c-b)}\,.\, dx}{2\,(c-x)\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

ZAMENGESTELDE FUNCTIEN.

Voorbeelden.	*Uitkomsten.*
1. $y = (x-a)\sqrt{(2ax-x^2)} + a^2 B\cos.\frac{a-x}{a}$.	$dy = 2\sqrt{(2ax-x^2)}dx$.
2. $y = (2a+x)\sqrt{(x^2-a^2)} + a^2 l.(x+\sqrt{(x^2-a^2)})$.	$dy = 2x\sqrt{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}dx$.
3. $= \frac{1}{3} l. \frac{a+x}{\sqrt{(a^2-ax+x^2)}} + \frac{1}{\sqrt{3}} B\,tg.\frac{x\sqrt{3}}{2a-x}$.	$dy = \frac{a^2 dx}{a^3+x^3}$.
4. $y = \frac{x+a}{x-a} + l.\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$.	$dy = \frac{-4ax\,dx}{(x+a)(x-a)^2}$.
5. $y = e^{n\varphi}\{n\sin.m\varphi - m\cos.m\varphi\}$	$dy = (n^2+m^2)e^{n\varphi}\sin.m\varphi\,d\varphi$.
6. $y = \frac{2\sin.\varphi}{\cos.^4\varphi} - \frac{\sin.\varphi}{\cos.^2\varphi} - \frac{1}{4} l.\left(\frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi}\right)$.	$dy = \frac{4\sin.^2\varphi d\varphi}{\cos.^5\varphi}$.
7. $y = e^{tg.\varphi}(tg.\varphi-1)$.	$dy = \frac{e^{tg.\varphi}\sin.\varphi d\varphi}{\cos.^3\varphi}$.
8. $y = (b-a)B\sin.\sqrt{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)} - \sqrt{(x-a)(b-x)}$.	$dy = \sqrt{\left(\frac{x-a}{b-x}\right)}dx$.
9. $y = l.(x+\sqrt{(x^2-a^2)}) - \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b} B\,tg.\frac{b\sqrt{(x^2-a^2)}}{x\sqrt{(a^2-b^2)}}$.	$dy = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)}}{x^2-b^2}dx$.

10. $y = (2c-a-b)\,B\sin.\sqrt{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)} - \sqrt{(x-a)(b-x)}$

$$+2\sqrt{(b-c)(c-a)}\,l.\left\{\frac{\sqrt{(c-a)(b-x)}+\sqrt{(b-c)(x-a)}}{\sqrt{(b-a)(c-x)}}\right\}.$$

$$dy = \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}dx}{c-x}.$$

DERDE LES.

Over de differentiaal quotienten en differentialen van hoogere orden der functien van ééne veranderlijke grootheid.

§ 26. Welke ook de aard en de zamenstelling eener functie van het veranderlijke element x zijn moge, zoo kunnen wij altijd, met behulp der in de vorige les verklaarde regels, uit de vergelijking

$$y = f(x),$$

het differentiaal quotient

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)$$

afleiden.

Daar de verkregene uitkomst, behoudens het geval waarin y van den vorm $ax + b$ is, wederom eene functie van x voorstelt, belet ons niets, om, op $f_1(x)$ insgelijks de regels der differentiatie toepassende, daaruit af te leiden

$$\frac{d.f_1(x)}{dx} = f_2(x),$$

dat is

$$\frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = f_2(x).$$

Bij deze herhaalde bewerking verkrijgt de functie $f_2(x)$ den naam van differentiaal quotient der tweede orde, ook wel van *tweede* afgeleide functie, ter onderscheiding van $f_1(x)$, welke alsdan differentiaal quotient der eerste orde, of *eerste* afgeleide functie genaamd wordt.

Is nu $f_2(x)$ insgelijks eene functie van x, dan kan zij op nieuw gedifferentiëerd worden, en men bekomt diensvolgens door eene derde gelijksoortige bewerking,

$$\frac{d\,f_2(x)}{dx} = f_3(x).$$

Op die wijze ontstaat het differentiaal quotient der derde orde

of de *derde* afgeleide functie; en deze herhaalde bewerking laat zich naar welgevallen voortzetten, voor zoo verre namelijk de oorspronkelijke functie niet tot de zoodanige behoort, die slechts een bepaald aantal achtereenvolgende differentiatiën toelaten. In dit laatste geval verkeert elke algebraïsche functie, begrepen in den polynomialen vorm

$$a + bx + cx^2 \ldots + kx^n,$$

n een geheel positief getal beteekenende.

Zij bijv.

$$y = f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,$$

dan vindt men door achtervolgende differentiatien,

$$f_1(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3.$$
$$f_2(x) = 2c + 6dx + 12ex^2.$$
$$f_3(x) = 6d + 24ex.$$
$$f_4(x) = 24e.$$

Daar $f_4(x)$ hier eene standvastige waarde verkregen heeft, laat zich de differentiatie niet verder voortzetten, dewijl het opvolgende differentiaal quotient nul zou worden. Men zal nu terstond inzien, dat elk polynomium van de n^e magt, in de hier aangenomene onderstelling, slechts zoo vele differentiaal quotienten toelaat, als er eenheden in den hoogsten exponent zijn.

Behalve de in dezen vorm begrepen functiën, zullen alle overige algebraïsche, even als de transcendentale functien van verschillende soorten, zoo als in den loop dezer lessen blijken zal, herhaaldelijk kunnen gedifferentiëerd worden, zonder immer eene standvastige waarde op te leveren.

§ 27. De op de voorgaande wijze verkregene afgeleidene functiën $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ enz., kortheidshalve door P_1, P_2, P_3 enz. voorstellende, zoo heeft men

$$\frac{dy}{dx} = P_1 \text{ of } dy = P_1 dx.$$

$$\frac{dP_1}{dx} = P_2, \quad dP_1 = P_2 dx.$$

$$\frac{dP_2}{dx} = P_3, \quad dP_2 = P_3 dx.$$

en in het algemeen

$$\frac{dP_{n-1}}{dx} = P_n, \quad dP_{n-1} = P_n dx.$$

Wil men die functiën, ten einde haren oorsprong beter te doen uitkomen, door middel van de differentialen dx, dy uitdrukken, dan zou men dezelve aldus behooren te schrijven:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = P_2,$$

$$\frac{d\left(\frac{\left(d.\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right)}{dx} = P_3,$$

enz. enz.

Eene dergelijke voorstellingswijze der achtervolgende differentiaal quotienten, wordt echter blijkbaar des te omslagtiger, naarmate zulks hoogere orden geldt. Men maakt uit dien hoofde gebruik van eene andere meer eenvoudige notatie, evenzeer geschikt om den oorsprong en het onderlinge verband dezer afgeleide functiën te doen uitkomen, en welker juistheid zich op eene voldoende wijze uit de navolgende meetkunstige beschouwing, met behulp van de leer der oneindig kleinen van verschillende orden (1^e. *Les*), laat verklaren.

§ 28. Zij namelijk AMM_1 (*fig.* 3) eene kromme tot vergelijking hebbende

$$y = f(x).$$

Laat de abscis $OP = x$ van eenig willekeurig punt M met $PP_1 = \Delta x$, en de ordinaat y met $\Delta y = M'Q$ aangroeijen, zoo dat $M_1P_1 = y + \Delta y = y_1$ wordt, dan heeft men

$$\Delta y = y_1 - y.$$

Men late de abscis $OP_1 = x + \Delta x$ op nieuw met $P_1P_2 = \Delta x$ toenemen, en stelle de, met de abscis $OP_2 = x + 2\Delta x$ overeenkomende ordinaat $M_2P_2 = y_2$, dan is $y_2 = y_1 + \Delta y_1$, en dus

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = M_2Q_1.$$

Volgens de notatie bij de eindige differentien aangenomen, kan men schrijven

$$\Delta y_1 - \Delta y = \Delta(y_1 - y) = \Delta.\Delta y = \Delta^2 y.$$

Verlengende nu de koorde of snijlijn MM_1 tot in R, dan is $RQ_1 = M_1Q = \Delta y$, en $M_2R = M_2Q_1 - RQ_1 = \Delta y_1 - \Delta y = \Delta^2 y$.

De lijn M_2R wijst alzoo het tweede verschil of de differentie der tweede orde van de ordinaat y aan, indien de abscis x twee

achtervolgende malen met hetzelfde verschil Δx aangegroeid is. Bij het doen naderen der punten M_1, M_2 tot het punt M, zullen Δx, Δy en $\Delta^2 y$ elk meer en meer tot nul naderen. Hierbij valt echter op te merken dat $\Delta^2 y$ veel sneller afneemt dan Δy of Δx. Immers, men kan de waarde van het tweede verschil $\Delta^2 y$ ook onder dezen vorm voorstellen :

$$\Delta^2 y = \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

Daar nu Δx en Δy steeds afnemende zijn, zullen de verhoudingen $\frac{\Delta y_1}{\Delta x}, \frac{\Delta y}{\Delta x}$ elk in het bijzonder tot hare gemeenschappelijke limiet $\frac{dy}{dx}$ naderen, waaruit alzoo blijkt, dat het verschil $\Delta^2 y$, als zamengesteld zijnde uit twee factoren, die elk afzonderlijk tot nul naderen oneindig klein is met betrekking tot elk dezer factoren, en dus als eene differentiaal van de tweede orde te beschouwen is, wanneer men namelijk Δx en Δy door dx en dy vervangt.

In deze onderstelling zal er derhalve eene eindige verhouding kunnen bestaan tusschen $\Delta^2 y$ en $(\Delta x)^2$, voor welke laatste men ook gewoon is te schrijven Δx^2. De waarde dezer verhouding wordt alsdan aangewezen door de limiet van het gebroken

$$\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\Delta . \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x},$$

welke limiet blijkbaar uitgedrukt wordt door $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, zoodat men stellen kan

$$\text{Lim.}\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right) = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}.$$

Zoo men nu de oneindig kleine waarde, welke $\Delta^2 y$ verkrijgt wanneer Δx in dx overgaat, door eene gelijksoortige notatie, namelijk $d^2 y$ aanwijst, hetgeen zoo veel beteekent als de differentiaal van de oneindig kleine aangroeijing dy, of de tweede differentiaal van de functie y, dan blijkt hieruit terstond, dat men, stellende

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) = P_1$$

voor de tweede afgeleide functie of voor het differentiaal quotient der tweede orde, schrijven mag

$$f_2(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dP_1}{dx} = P_2.$$

§ 29. Beschouwen wij thans nog eene vierde ordinaat y_3 overeenkomende met de abscis $x + 3\Delta x$, dan hebben wij, behalve het eerste verschil

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2,$$

en de beide tweede verschillen

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y, \qquad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,$$

nog het derde verschil

$$\Delta(\Delta^2 y) = \Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y.$$

Door Δx en Δy wederom tot nul te doen naderen, zullen $\Delta^2 y$ en $\Delta^3 y$ insgelijks meer en meer afnemen. Doch, men zal nu op gelijke wijze kunnen aantoonen, dat, even als $\Delta^2 y$ veel sneller afneemt dan Δy, zulks insgelijks met $\Delta^3 y$ ten opzigte van $\Delta^2 y$ plaats vindt. Te dien einde schrijve men het derde verschil aldus

$$\Delta^3 y = \left(\frac{\Delta^2 y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right) \Delta x \,.\, \Delta x.$$

Elke der twee verhoudingen $\frac{\Delta^2 y_1}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ nadert tot hare gemeenschappelijke limiet, hiervoren door $\frac{d^2 y}{dx^2}$ aangewezen, zoodat haar verschil eene oneindig kleine grootheid wordt. De waarde van $\Delta^3 y$ bestaat alzoo uit drie factoren, die elk tot nul naderen, en neemt dus veel spoediger af dan $\Delta^2 y$, die slechts uit twee dusdanige factoren bestaat. Vervangt men dan Δx door dx, zoo wordt $\Delta^3 y$ eene differentiaal of eene oneindig kleine van de derde orde met betrekking tot dx. Wijders heeft men, op grond der voorgaande vergelijking, de verhouding

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{\frac{\Delta^2 y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}}{\Delta x} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)}{\Delta x},$$

welke, in de onderstelling van Δx oneindig klein, en noemende als dan $d^3 y$, de oneindig kleine waarde van $\Delta^3 y$, tot limiet heeft

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d.\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d.\left(\frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right)}{dx},$$

of hetgeen hetzelfde is

$$f_3(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{dP_2}{dx} = P_3,$$

waarin $d^3 y$ de derde differentiaal van de functie y voorstelt.

Op gelijke wijze voortgaande, zal het blijken dat $f_4(x)$, $f_5(x)$ en in het algemeen $f_n(x)$, dat is de n^e afgeleide functie, of het differentiaal quotient der n^e orde, op eene meer verkorte wijze kan aangeduid worden door $\frac{d^ry}{dx^n}$.

Men verkrijgt derhalve de differentiaal der n^e orde eener functie $f(x)$, wanneer men hare n^e afgeleide functie met de n^e magt der differentiaal van x vermenigvuldigt.

§ 30. Tot de voorgaande uitkomsten had men ook aldus kunnen geraken.

Uit de eerste differentiaal vergelijking

$$dy = P_1dx$$

volgt onmiddelijk, door elk lid op nieuw te differentiëren, en daarbij dy als eene functie van x en dx te beschouwen,

$$d(dy) = d^2y = d(P_1dx).$$

Neemt men hierin den factor dx standvastig aan, dan verkrijgt men terstond

$$d^2y = dP_1dx = P_2dx^2.$$

Derhalve
$$\frac{d^2y}{dx^2} = P_2 = f_2(x).$$

De waarde van d^2y op nieuw differentiërende, en hare differentiaal door d^3y aanwijzende, komt er, in dezelfde onderstelling als voren,

$$d^3y = dP_2dx^2 = P_3dx^3,$$

of
$$\frac{d^3y}{dx^3} = P_3 = f_3(x),$$

en hiermede kan men steeds op gelijke wijze voortgaan. De meetkunstige beschouwing, waarvan wij ons hiervoren bedienden, levert echter het voordeel op, dat zij over den oorsprong en den waren zin der differentialen van de tweede en hoogere orde een helder licht verspreidt, en ons daarenboven leert, dat het standvastig aannemen van dx, bij de achtervolgende bepaling van d^2y, d^3y, enz. volgens de laatste handelwijze, gegrond is op de onderstelling dat men de abscis x met gelijke verschillen doet aangroeijen, alvorens deze als oneindig klein in rekening te brengen; en dit is altijd geoorloofd, vermits niets belet om x op eene zoodanige onafgebrokene wijze te doen aangroeijen, als men vooraf overeenkomt.

Men vergete evenwel hierbij niet, dat de notatiën $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, enz. eeniglijk op die gemakshalve aangenomene onderstelling berusten en dat, bij aldien men een' ongelijkmatigen aanwas van x aannam, de waarden der achtervolgende differentiaal quotienten een' meer zamengestelden vorm zouden verkrijgen; eene omstandigheid waarop wij later ter behoorlijke plaatse zullen terugkomen.

Wij leeren tevens uit het voorgaande, dat hoezeer dy, d^2y, d^3y elk in het bijzonder te gelijk met dx tot nul naderen, echter d^2y, d^3y enz., als oneindig klein ten opzigte van dy, d^2y te beschouwen zijn, en men dus op deze tweede en hoogere differentialen, de in § 9 verklaarde eigenschappen der oneindig kleinen van verschillende orden, van toepassing kan maken.

§ 31. Het zal niet noodig zijn hier opzettelijk voorbeelden van herhaalde differentiatien bij te brengen, dewijl zulks slechts op eene toepassing van de, in onze vorige les, betoogde algemeene regels zou nederkomen. In verre de meeste gevallen zullen de opvolgende differentiaal quotienten eener gegevene functie meer en meer zamengestelde uitdrukkingen opleveren. Er zijn nogtans sommige functien, en hiervan zullen wij thans enkele voorbeelden mededeelen, welke de eigenschap bezitten, dat hare opvolgende differentiaal quotienten gemakkelijk uit elkander af te leiden zijn, en in dezelfde algemeene uitdrukking kunnen omvat worden, zoo dat zich daaruit een differentiaal quotient van willekeurige orde regtstreeks laat opmaken, zonder een van eene lagere orde vooraf bekend te hebben.

1°. Zij
$$y = x^m$$
dus
$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$
waaruit men terstond voor de waarde van het differentiaal quotient der n^e orde kan besluiten,
$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Is m een geheel positief getal, dan wordt

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1.2.3..\,m,$$

en dus standvastig, hetgeen reeds vroeger (§ 26) opgemerkt is.

2°. Zij
$$y = a^x,$$
dan heeft men
$$\frac{dy}{dx} = a^x\, l(a),$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^x\, l(a)^2,$$
en in het algemeen
$$\frac{d^ny}{dx^n} = a^x\, l(a)^n.$$
Voor $a = e$, wordt
$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^x = y.$$

De functie e^x is de eenige, welke de bijzondere eigenschap bezit, dat zij steeds met hare achtervolgende afgeleide functiën overeenkomt.

3°. Zij
$$y = sin.\,\varphi,$$
dus
$$\frac{dy}{d\varphi} = cos.\,\varphi = sin.\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$
$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = -sin.\,\varphi = sin.\,(\pi + \varphi),$$
$$\frac{d^3y}{d\varphi^3} = -cos.\,\varphi = sin.\left(\frac{3\,\pi}{2} + \varphi\right),$$
en in het algemeen
$$\frac{d^ny}{d\varphi^n} = \frac{d^n\, sin.\,\varphi}{d\varphi^n} = sin.\left(\frac{n\,\pi}{2} + \varphi\right).$$

Op gelijke wijze vindt men
$$\frac{d^n\, cos.\,\varphi}{d\varphi^n} = cos.\left(\frac{n\,\pi}{2} + \varphi\right).$$

4°. Zij
$$y = \frac{x}{a+x} = 1 - \frac{a}{a+x},$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{(a+x)^2} = a\,(a+x)^{-2},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a}{(a+x)^3} = -2a\,(a+x)^{-3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6a}{(a+x)^4} = +2.3.a\,(a+x)^{-4},$$

en in het algemeen

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \pm \frac{1.2.3..n.a}{(a+x)^{n+1}},$$

naardat *n* een oneven of even getal is.

Men kan deze uitkomst ook aldus schrijven:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n+1}\frac{1.2.3..n.a}{(a+x)^{n+1}}.$$

5°. Zij

$$y = log.(a+x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a+x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{(a+x)^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = +\frac{2}{(a+x)^3},$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n+1}\frac{1.2.3..(n-1)}{(a+x)^n}.$$

6°. Zij $y = uv$, waarin u en v ondersteld worden functiën van x te zijn, dan heeft men achtervolgens:

$$dy = udv + vdu$$

$$d^2y = ud^2v + dudv + vd^2u + dudv$$

of

$$d^2y = ud^2v + 2dudv + vd^2u$$

$$d^3y = ud^3v + dud^2v + 2dud^2v + 2dvd^2u + dvd^2u + vd^3u$$

of

$$d^3y = ud^3v + 3dud^2v + 3d^2udv + vd^3u.$$

Op gelijke wijze voortgaande, zal men vinden

$$d^4y = ud^4v + 4dud^3v + 6d^2ud^2v + 4dud^3v + vd^4u.$$

En aangezien de getallen coëfficiënten der achtervolgende differentiaal producten niets anders zijn dan de gewone binomiaal coëfficiënten, laat zich hieruit, voor de waarde van het differentiaal quotient der n^e orde, gemakkelijk opmaken de algemeene formule

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^n(uv)}{dx^n} = \frac{ud^nv}{dx^n} + \frac{ndu}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \frac{n.n-1}{1.2.}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} \dots + v\frac{d^nu}{dx^n},$$

welker juistheid ook daaruit blijken kan, dat zij, voor eene zekere waarde van n geldig zijnde, het insgelijks voor $n+1$ wezen zal,

gelijk door eene differentiatie dezer formule spoedig te bewijzen is.

§ 32. Tot de eigenschappen der opvolgende differentiaal quotienten behooren ook deze.

Indien y = f (x), *voor eene bijzondere waarde van* x = *a*, *oneindig groot wordt, zullen al de achtervolgende differentiaal quotienten, te rekenen van het eerste, insgelijks oneindig groot worden.*

Men kan zulks gemakkelijk aldus betoogen. Om aan de aangenomene onderstelling te kunnen voldoen, moet de functie herleidbaar zijn tot den gebroken vorm

$$y = \frac{X}{\varphi\,(x-a)}$$

zijnde de noemer eene functie, welke voor $x = a$ verdwijnt, en X eene andere functie van x, die alsdan eene eindige waarde behoudt. Differentiëert men nu y ten opzigte van x, dan komt er

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi\,(a-x)\,\frac{dX}{dx} + \varphi_1(a-x)X}{\varphi^2\,(x-a)},$$

welke uitdrukking voor $x = a$ wederom oneindig groot wordt. Door eene gelijksoortige redenering zal het blijken, dat zoo wel $\frac{d^2y}{dx^2}$ als elke der opvolgende afgeleide functiën insgelijks oneindig groot moet worden.

Hieruit volgt dan ook bij omkeering, dat indien eenige afgeleide functie voor $x = a$ eene eindige waarde bekomt, zulks evenzeer plaats zal hebben met elke der voorafgaande afgeleide functiën, en dus ook met de oorspronkelijke functie.

§ 33. Wanneer $y = f(x)$ voor eene bijzondere waarde $x = a$ nul wordt, kan $\frac{dy}{dx}$ of $f_1(x)$ desniettemin eene eindige waarde bekomen; want, stellende $y = (x-a)\,F(x)$, waarin de factor $F(x)$ niet nul wordt voor $x = a$, dan zal men hebben

$$\frac{dy}{dx} = F(x) + (x-a)\,F_1(x),$$

welke uitdrukking, voor $x = a$, behoudens het geval waarin $F_1(x)$ in die onderstelling oneindig groot wordt, in $F(x)$ overgaat, en dus niet nul wordt.

Is echter y van den vorm $(x-a)^2 F(x)$, en dus

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(x-a)\,F(x) + (x-a)^2\,F_1(x),$$

alsdan verdwijnt deze eerste afgeleide functie wederom voor $x = a$, doch de volgende zal niet nul worden, zoolang $F_1(x)$ niet oneindig wordt.

In het algemeen zal men hierin het navolgende mogen besluiten.

Indien y *van den vorm* $(x - a)^m F(x)$ *is,* m *een geheel positief getal zijnde, zullen de* m—1 *achtervolgende afgeleide functiën allen te gelijk met* y, *voor* $x = a$ *verdwijnen.*

Is echter m *een gebroken, gelegen tusschen twee op elkander volgende geheele getallen* p *en* p + 1, *dan zal het* (p + 1)^e^ *differentiaal quotient, en dus ook elke volgende, voor* $x = a$ *oneindig worden.*

Dit een en ander kan tevens bevestigd worden door de in § 31 voorkomende algemeene uitdrukking voor $\frac{d^n.uv}{dx^n}$. Stelt men namelijk daarin $u = (x - a)^n$, $v = F(x)$ en $n = m$, dan laat zich terstond inzien, dat al de termen dezer uitdrukking op den laatsten na, voor $x = a$ zullen verdwijnen, en de waarde van het differentiaal quotient van het gegeven product, overgaat in

$$1. 2. 3... m. F(x).$$

Ligt nu m tusschen de geheele getallen p en $p + 1$, dan zal, voor $n = p + 1$, de overig blijvende laatste term eenen negatieven exponent bekomen, en dus voor $x = a$ oneindig groot worden.

VIERDE LES.

Differentiatie van ingewikkelde functiën eener enkele veranderlijke grootheid.

§ 34. Indien er tusschen twee veranderlijken x en y, eene zoodanige betrekking van afhankelijkheid bestaat, dat zij op eene ingewikkelde wijze met elkander verbonden zijn, waardoor het bezwaarlijk, zoo niet onmogelijk wordt, y af te zonderen of in eindigen vorm in x uit te drukken, dan is men gewoon y eene ingewikkelde functie (*fonction implicite*) van x te noemen, en deze functie aldus voor te stellen

$$f(x,y) = 0,$$

van welke vergelijking het voorste lid uit termen bestaat, waarin x en y op verschillende wijzen met elkander vermengd zijn.

Daar die vergelijking voor alle waarden van x geldt, vervange men deze door $x + \Delta x$, en de daarmede overeenstemmende waarde van y, door $y + \Delta y$, dan heeft men eveneens,

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0,$$

dus ook

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0.$$

Laat men nu Δx, en Δy tot nul naderen, zoo volgt hieruit terstond

$$\frac{d.f(x,y)}{dx} = 0, \text{ of } d.f(x, y) = 0.$$

Door het differentiëren der functie $f(x,y) = 0$, verkrijgt men blijkbaar eene uitkomst van den vorm

$$Pdx + Qdy = 0,$$

waarin P en Q in het algemeen als functiën van x en y te beschouwen zijn.

Deze differentiaal vergelijking geeft tevens te kennen, dat de functiën P en Q ook afzonderlijk verkregen worden door $f(x,y)$ te differentiëren, als of y en x beurtelings standvastige waarden hadden. Uit dien hoofde is men gewoon P voor te stellen door $\frac{df(x,y)}{dy}$, of kortheidshalve door $\frac{df}{dx}$, en even zoo Q door $\frac{df}{dy}$; de eerste vorm beteekent dus niets anders dan het differentiaal quotient van de gegevene

functie, alleen ten aanzien van x als veranderlijk element; de tweede beteekent hetzelfde ten aanzien van y. Op dien grond worden P en Q ook genaamd de gedeeltelijke of partiële differentiaal quotienten van de ingewikkelde functie.

Uit elke vergelijking van den vorm

$$f(x,y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

volgt derhalve door differentiatie

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

dus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{f}{dy}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Deze differentiaal verhouding is nu niet regtstreeks in x, maar wel in de beide veranderlijke grootheden gelijktijdig uitgedrukt. Bestaat echter de mogelijkheid om y tusschen de vergelijkingen (1) en (2) te elimineren, dan zal men voor $\frac{dy}{dx}$ dezelfde uikomst moeten verkrijgen, als of men y regtstreeks in functie van x gedifferentiëerd hadde. Het volgende voorbeeld zal zulks kunnen toelichten.

Zij

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ry - a^2 = 0,$$

dus

$$\frac{df}{dx} = 2x, \quad \frac{df}{dy} = 2(y-r),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{r-y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Nu volgt uit de gegevene vergelijking

$$x^2 + (r-y)^2 = a^2 + r^2,$$

$$r - y = \sqrt{(a^2 + r^2 - x^2)},$$

waardoor men in de plaats van (a) bekomt;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(a^2 + r^2 - x^2)}}.$$

Door y regtstreeks in x uit te drukken en vervolgens te differentiëren, komt er

$$y = r - \sqrt{(a^2 + r^2 - x^2)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(a^2 + r^2 - x^2)}},$$

even als hiervoren.

§ 35. Om eene uitdrukking te vinden voor het tweede differentiaal quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$, differentiëre men de waarde van

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P'}{Q} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}},$$

dan heeft men

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{PdQ - QdP}{Q^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Maar, omdat P en Q elk insgelijks in x en y uitgedrukt zijn, zullen de differentialen dezer grootheden termen bevatten, die zoowel met dy als met dx aangedaan zijn, zoodat men zal moeten stellen,

$$dP = P_1 dx + P_2 dy$$

$$dQ = Q_1 dx + Q_2 dy$$

Hierin duiden nu P_1, Q_1 de differentiaal quotienten aan, welke men verkrijgt door P, Q eeniglijk ten aanzien van x te differentiëren, y daarbij als standvastig aannemende; zij kunnen, ingevolge de voorgaande notatie, voorgesteld worden door $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dydx}$. Even zoo beteekenen P_2, Q_2 de differentiaal quotienten van P en Q eeniglijk ten opzigte van y genomen, en kunnen dus voorgesteld worden door $\frac{d^2f}{dxdy}$, $\frac{d^2f}{dy^2}$, zoodat wij hebben

$$dP = d\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2}dx + \frac{d^2f}{dxdy}dy$$

$$dQ = d\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{d^2f}{dydx}dx + \frac{d^2f}{dy^2}dy$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat $\frac{d^2f}{dx^2}$ en $\frac{d^2f}{dy^2}$ respectivelijk niets anders aanwijzen dan de differentiaal quotienten, die men verkrijgt door de functie $f(x, y)$ twee malen achtereen te differentiëren, ten opzigte van x en ten opzigte van y, even als of eene dezer twee veranderlijken beurtelings standvastig ware; terwijl $\frac{d^2f}{dxdy}$ en $\frac{d^2f}{dydx}$ aanwijzen de uitkomsten van twee achtervolgende differentiatiën van $f(x,y)$, eerst ten aanzien van x en dan ten aanzien van y, of omgekeerd.

§ 36. Wij zullen thans aantoonen, dat de orde dezer twee laatste

differentatiën onverschillig is, en men in beide gevallen dezelfde uitkomst verkrijgt.

Daar namelijk $\frac{df}{dx}$ de limiet voorstelt der waarde van het gebroken

$$\frac{f(x+\Delta x,\, y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

wanneer Δx tot nul nadert, zal $\frac{d^2f}{dx\,dy}$ de limiet zijn van de verhouding tusschen de aangroeijing der voorgaande waarde, ten gevolge eener verandering van y in $y+\Delta y$, en de aangroeijing Δy zelve, dat is, van het gebroken

$$\frac{\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}-\left(\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right)}{\Delta y}, \qquad (a)$$

indien namelijk Δx en Δy tot nul naderen.

Even zoo is $\frac{df}{dy}$ de limiet van

$$\frac{f(x,y+\Delta y)\;-\;f(x,y)}{\Delta y},$$

en $\frac{d^2f}{dy\,dx}$ de limiet van

$$\frac{\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}-\left\{\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right\}}{\Delta x} \qquad (a').$$

De identiteit der beide uitdrukkingen (a) (a'), leidt gemakkelijk tot het besluit

$$\frac{d^2f}{dxdy}=\frac{d^2f}{dydx}.$$

Om deze eigenschap der differentiaal quotienten door een enkel voorbeeld te bevestigen, neme men

$$f(x,\,y)=ax^4y-bx^3y^2+cx^2\sqrt{y},$$

dan is

$$\frac{df}{dx}=4ax^3y-3bx^2y^2+2cx\sqrt{y}.$$

$$\frac{d^2f}{dxdy}=4\,ax^3-6\,bx^2y+\frac{cx}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{df}{dy}=ax^4-2\,bx^3y+\frac{cx^2}{2\sqrt{y}}.$$

$$\frac{d^2f}{dx\,dy}=4\,ax^3-6\,bx^2y+\frac{cx}{\sqrt{y}}.$$

dus

$$\frac{d^2f}{dx\,dy}=\frac{d^2f}{dy\,dx}.$$

Door elk dezer beide differentiaal quotienten eeniglijk ten aanzien van x te differentiëren, bekomt men de vergelijking

$$\frac{d^3f}{dx\,dy\,dx} = \frac{d^3f}{dy\,dx^2}.$$

Het voorste lid duidt eene drievoudige differentiatie aan, namelijk eerst ten opzigte van x, vervolgens ten opzigte van y, en eindelijk nog eens ten opzigte van x. Verandert men nu de orde der twee laatste bewerkingen, dan verkrijgt men

$$\frac{d^3f}{dx\,dy\,dx} = \frac{d^3f}{dx^2dy} = \frac{d^3f}{dy\,dx^2},$$

waaruit blijkt, dat indien $f(x, y)$ drie achtervolgende differentiatiën moet ondergaan, en wel twee malen ten opzigte van x en eens ten opzigte van y, het insgelijks onverschillig is in welke orde die bewerkingen volbragt worden, vermits de uitkomst steeds dezelfde blijft. Op gelijke wijze voort redenerende, overtuigt men zich spoedig dat dezelfde eigenschap ook in het algemeene geval plaats vindt, waarin men $p+q$ achtervolgende differentiatien, namelijk p malen ten aanzien van x, en q malen ten aanzien van y te verrigten heeft. De uitkomst zal altijd onafhankelijk zijn van de orde, bij die $p+q$ differentiatien in acht genomen, zoo dat men ook stellen mag,

$$\frac{d^{p+q}f}{d^px\,d^qy} = \frac{d^{p+q}f}{d^qy\,d^px} = \frac{d^{p+q}f}{d^{q-m}y\;dx^n d^my\,d^{p-n}x},\ \text{enz.}$$

§ 37. Keeren wij thans terug tot de vergelijking

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{PdQ - QdP}{Q^2},$$

en schrijven wij hierin voor P, $\frac{df}{dx}$, voor Q, $\frac{df}{dy}$; wijders voor dP en dQ de hiervoren gevondene uitdrukkingen

$$\frac{d^2f}{dx^2}dx + \frac{d^2f}{dx\,dy}dy,$$

$$\frac{d^2f}{dx\,dy}dx + \frac{d^2f}{dy^2}dy,$$

dan bekomt men, na door dx gedeeld te hebben

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{df}{dx}\left\{\frac{d^2f}{dxdy} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{dy}{dx}\right\} - \frac{df}{dy}\left\{\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dxdy}\frac{dy}{dx}\right\}}{\left(\frac{df}{dy}\right)^2}.$$

Vervangt men hierin $\frac{dy}{dx}$ door zijne waarde $-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$, dan gaat de vorige uitdrukking over in deze

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)^2\frac{d^2f}{dy^2} - \frac{2d^2f}{dxdy}\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dy} + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\frac{d^2f}{dx^2}}{\left(\frac{df}{dy}\right)^3}, \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waardoor alzoo het tweede differentiaal quotient van y, uitsluitend in de partiele differentiaal quotienten van de eerste en tweede orde uitgedrukt is. Men zou tevens tot dezelfde uitkomst hebben kunnen geraken, door het differentiëren der vergelijking

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0,$$

met inachtneming dat dx hierbij standvastig blijft, terwijl dy vermeerdert met d^2y.

De hiervoren gevonden waarde van $\frac{d^2y}{dx^2}$ zal identiek moeten zijn, met die welke, indien y zich regtstreeks in functie van x laat uitdrukken, door eene herhaalde differentiatie van y gevonden wordt, zoo als zulks door het voorbeeld van § 34 kan bevestigd worden.

Aldaar is namelijk $\frac{df}{dx} = 2x$, $\frac{df}{dy} = 2(y-r)$,

dus $\frac{d^2f}{dxdy} = 0.$ $\frac{d^2f}{dx^2} = 2.$ $\frac{d^2f}{dy^2} = 2.$

en volgens (5)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-8x^2 - 8(y-r)^2}{8(y-r)^3} = \frac{x^2 + (y-r)^2}{(r-y)^3},$$

Hierin $(r-y)^2$ wederom vervangende door $a^2 + r^2 - x^2$, vindt men,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2 + r^2}{\sqrt{(a^2 + r^2 - x^2)^3}}.$$

Differentiëert men nu de waarde van

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(a^2 + r^2 - x^2)}},$$

dan komt er voor het tweede differentiaal quotient,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{(a^2 + r^2 - x^2)} + \frac{x^2}{\sqrt{(a^2+r^2-x^2)}}}{a^2 + r^2 - x^2} = \frac{a^2 + r^2}{\sqrt{(a^2 + r^2 - x^2)^3}},$$

even als hiervoren.

Op gelijke wijze voortgaande, zullen wij door het differentieren der formule (5), uitdrukkingen kunnen bekomen voor de differentiaal quotienten der derde en hoogere orden van de functie y, waarin eeniglijk de verschillende partiele differentiaal quotienten van $f(x, y)$ voorkomen. Daar echter die uitdrukkingen vrij zamengesteld worden, zullen wij de mededeeling daarvan des te eerder achterwege kunnen laten, daar het in de meeste gevallen verkiesselijk zijn zal, de gegevene vergel. $f(x, y) = 0$, n malen achter elkander ten aanzien van x te differentiëren; men bekomt alsdan een stelsel van $n + 1$ vergelijkingen, bevattende de verschillende differentiaal quotienten van y, tot dat der n^e orde ingesloten. Elimineert men vervolgens tusschen die vergelijkingen al de differentiaal quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, dan laat zich hierdoor de waarde van $\frac{d^ny}{dx^n}$ in functie van x en y bepalen.

§ 38. Om die laatste handelwijze nader toe te lichten, hernemen wij onze vorige vergelijking

$$x^2 + y^2 - 2\,ry - a^2 = 0,$$

gevende, na eene eerste differentiatie

$$x + (y - r)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

Deze op nieuw differentiëerende, en daarbij dx als standvastig beschouwende, komt er

$$1 + (y - r)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0. \quad \dots\dots (7)$$

Wil men thans de waarde van $\frac{d^2y}{dx^2}$ kennen, dan volgt uit deze laatste vergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{r - y},$$

welke, na substitutie voor $\frac{dy}{dx}$ van zijne waarde volgens (6), geeft

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1 + \left(\frac{x^2}{(r-y)^2}\right)}{r - y} = \frac{x^2 + (r-y)^2}{(r-y)^3} = \frac{a^2 + r^2}{\sqrt{(a^2 + r^2 - x^2)^3}},$$

even als vroeger

Door het differentiëren der vergelijking (7) komt er, ter bepaling van $\frac{d^3y}{dx^3}$,

$$(y-r)\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{2\,dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

waaruit $$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}}{r-y},$$

$$=\frac{3x}{r-y}\times\frac{(r-y)^2+x^2}{(r-y)^3}\times\frac{1}{r-y},$$

$$=\frac{3x\{(r-y)^2+x^2\}}{(r-y)^5}=\frac{3x(a^2+r^2)}{\sqrt{(a^2+r^2-x^2)^5}},$$

hetgeen ook overeenstemt met de uitkomst, welke men door onmiddelijke differentiatie der waarde van

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^2+r^2}{\sqrt{(a^2+r^2-x^2)^3}},$$

zoude verkrijgen.

Zij, tot een ander voorbeeld, de vergelijking

$$x^2+xy-ax-by=0.$$

Door achtervolgende differentiatien vindt men,

$$2x+y+(x-b)\frac{dy}{dx}-a=0.$$

$$2+2\frac{dy}{dx}+(x-b)\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

$$3\frac{d^2y}{dx^2}+(x-b)\frac{d^3y}{dx^3}=0.$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3}+(x-b)\frac{d^4y}{dx^4}=0.$$

enz. enz.

Alzoo komt er

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-a}{b-x}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\left(1+\frac{dy}{dx}\right)}{b-x}=\frac{2(x+y+b-a)}{(b-x)^2}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{3\,d^2y}{dx^2}}{b-x}=\frac{2.3\,(x+y+b-a)}{(b-x)^3}.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{\frac{4d^3y}{dx^3}}{b-x}=\frac{2.3.4\,(x+y+b-a)}{b-x)^4}.$$

waarin de wet van opvolging ter bepaling der achtervolgende differentiaal quotienten in het oog loopt. Wil men nu alles in x uitdrukken, dan hebbe men slechts, in de voorgaande uitkomsten, y te vervangen door $\frac{x^2-ax}{b-x}$.

Bij toepassing der voorgaande handelwijze op de vergelijking

$$y^3-3axy+x^3=0,$$

zal men de waarden van eenige differentiaal quotienten van verschillende orde in functie van x en y kunnen bekomen. Het elimineren van y of x zal hier intusschen met moeijelijkheden gepaard gaan, uithoofde daartoe de oplossing eener derde magtsvergelijking gevorderd wordt.

§ 39. De vergelijkingen door achtervolgende differentiatiën, uit de gegevene tusschen y en x verkregen, en welke wij voortaan de *afgeleide* vergelijkingen van verschillende orde zullen noemen, kunnen insgelijks gebruikt worden om, bijaldien de oorspronkelijke vergelijking $f(x,y)=0$, eenige standvastige grootheden in zich bevat, deze daaruit te verdrijven, en alzoo eene differentiaal vergelijking van zekere orde te bekomen, welke voor alle waarden dezer standvastigen geldig zal wezen. Te dien einde zal het voldoende zijn de voorgestelde vergelijking zoo vele malen te differentiëren als het aantal aanwezige standvastigen bedraagt.

Nemen wij tot voorbeeld de vergelijking der ellips,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

dan komt er achtervolgens

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

waaruit men, na vermenigvuldiging met b^2x, terstond vindt

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0;$$

welke differentiaal vergelijking thans zoowel op alle ellipsen, als op alle cirkels en hyperbolen van toepassing is.

Men kan ook hetzelfde oogmerk bereiken door elke der standvastigen, indien zulks mogelijk is, uit de vergelijking beurtelings af te zonderen, en deze onder haren nieuwen vorm te differentiëren, waardoor de standvastigen achtervolgens verdwijnen zullen.

Past men die handelwijze op de voorgaande vergelijking toe, dan volgt uit deze

$$b^2 = \frac{a^2 y^2}{a^2 - x^2},$$

en dus, na differentiatie

$$(a^2 - x^2)\, y \frac{dy}{dx} + xy^2 = 0,$$

of

$$(a^2 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Hieruit a^2 afzonderende, bekomen wij

$$a^2 = x^2 - xy \frac{dx}{dy}.$$

Eene tweede differentatie geeft,

$$2x - \frac{dx}{dy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + xy\frac{d^2y}{dy^2} = 0,$$

$$x - y\frac{dx}{dy} + xy\frac{d^2y}{dy^2} = 0,$$

en dus

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + xy\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

hetgeen met de vorige uitkomst overeenstemt. Het zal echter in de meeste gevallen voordeeliger zijn, zich van de eerste handelwijze te bedienen.

Zij nog de vergelijking

$$y = log.\,(ae_x + be^{-x})$$

dan is

$$e^y = ae^x + be^x$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = ae^x - be^{-x}$$

$$e^y \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2}\right\} = ae^x + be^{-x} = e^y,$$

dus

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} = 1,$$

waardoor gelijktijdig de transcendentale functiën verdreven zijn.

Voor de vergelijking

$$y = A\, sin.\, x + B\, cos.\, x,$$

zal men op gelijke wijze vinden,

$$y + \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

VIJFDE LES.

Toepassing der differentiaal rekening op het onderzoek der waarden van uitdrukkingen, voorkomende onder een' der onbepaalde vormen

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

§ 40. Zij $\frac{F(x)}{f(x)}$ een gebroken, welks teller en noemer voor eene bijzondere waarde van $x = a$, gelijktijdig verdwijnen, alsdan neemt dat gebroken den vorm $\frac{0}{0}$ aan, welke eene onbepaalde uitkomst schijnt aan te duiden. In verre de meeste gevallen nogtans verkrijgt dat quotient eene eindige en bepaalde waarde; somtijds echter wordt hetzelve nul of oneindig groot.

Het gebroken $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ bijv., hetwelk voor $x = a$, overgaat in $\frac{0}{0}$, zal, nadat teller en noemer door den gemeenschappelijken factor $x - a$ gedeeld zijn, veranderen in

$$\frac{x^2+ax+a^2}{x+a},$$

en derhalve, voor $x = a$, de bepaalde waarde $\frac{3a}{2}$ verkrijgen. Op gelijke wijze zal het blijken, dat het meer algemeene gebroken $\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}$ in dezelfde onderstelling tot waarde bekomt $\frac{n}{m}a^{n-m}$.

Men stelle in het algemeen,

$$F(x) = (x-a)^n X,\ \text{en}\ f(x) = (x-a)^m X',$$

waarin n en m willekeurige positieve getallen, en X, X' functiën van x beteekenen, welke voor $x = a$ niet verdwijnen, doch de eindige waarden A, A' verkrijgen. De functiën $F(x)$, $f(x)$ zullen alsdan aan de aangenomene onderstelling voldoen. Nu wordt

$$\frac{F(x)}{f(x)} = (x-a)^{n-m}\frac{X}{X'}.$$

Hierbij kunnen zich thans drie verschillende gevallen voordoen, te weten:

$$1^e.\ n = m. \qquad 2^e.\ n > m. \qquad 3^e.\ n < m.$$

In het eerste geval gaat het gebroken $\frac{F(x)}{f(x)}$, voor $x = a$ over in $\frac{A}{A'}$, en verkrijgt alsdan eene eindige en bepaalde waarde; in het tweede geval wordt hetzelve nul, en in het derde, oneindig groot.

Het blijkt hieruit, dat indien eenig gebroken $\frac{F(x)}{f(x)}$ voor $x = a$, den vorm $\frac{0}{0}$ aanneemt, hetzelve alleen dan eene eindige en bepaalde waarde verkrijgt, bijaldien teller en noemer een' gemeenschappelijken factor $(x-a)^n$ bezitten; n een geheel of gebroken positief getal zijnde.

Schrijven wij thans voor x, $a+h$, zoodat h het veranderlijke element van elke der beide functien wordt, dan gaat $\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(a+h)}{f(a+h)}$ voor $h = 0$, over in $\frac{0}{0}$. De gezochte waarde beteekent dus niet anders dan de limiet, waartoe het veranderlijke gebroken meer en meer nadert, naarmate x minder van a, of h minder van nul verschilt.

Ter bepaling der waarde van het gebroken $\frac{0}{0}$, zou men alzoo den volgenden weg kunnen inslaan. Men vervange x door $a+h$, en ontwikkele de beide functiën naar de opklimmende magten van h, dan zullen teller en noemer overgaan in de eindige of oneindige reijen

$$h^n(A + Bh + Ch^2 + \text{enz.})$$

$$h^n(A' + B'h + C'h^2 + \text{enz.})$$

waarvan het quotient, in geval van $n = m$, blijkbaar tot limiet heeft, $\frac{A}{A'}$

Indien echter het gebroken $\frac{0}{0}$, nul of oneindig groot wordt, zal zulks hierdoor aangeduid worden, dat de factor h in de eerste rei, alsdan tot eene hoogere of tot eene lagere magt klimt dan in de tweede.

Zijn $F(x)$, $f(x)$ beide rationale algebraïsche functiën van x, dan zou men, door het zoeken van den grootsten gemeenen deeler insgelijks de waarde van de verhouding $\frac{X}{X^1}$, waartoe de breuk $\frac{F(x)}{f(x)}$ herleidbaar is, kunnen bepalen.

Beide handelwijzen geven echter tot omslagtige bewerkingen en herleidingen aanleiding, vooral dan, wanneer $F(x)$, $f(x)$ irrationale of transcendentale functiën in zich bevatten, welke het ontwikkelen in oneindig voortloopende reeksen zouden vorderen. Gelukkigerwijs geeft ons de differentiaal-rekening in de afgeleide functiën een geschikt middel aan de hand, om spoedig de waarde te bepalen van eenig gebroken, dat den vorm $\frac{0}{0}$ aanneemt.

§ 41. Men kan namelijk betoogen, dat de verhouding der functiën $F(x)$, $f(x)$, die beiden voor $x = a$ verdwijnen, tot limiet heeft, de verhouding van derzelver eerste afgeleide functiën $F_1(x)$, $f_1(x)$, na hierin insgelijks $x = a$ gesteld te hebben, en dat, indien ook deze zoowel als de achtervolgende afgeleide functiën tot die der $(n-1)^e$ orde ingesloten, voor $x = a$ verdwijnen, alsdan in dezelfde onderstelling $\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F_n(x)}{f_n(x)}$ wordt.

Deze gewigtige eigenschap der afgeleide functiën steunt op de navolgende stelling, welke wij hier als een lemma laten voorafgaan, en waaruit wij later gelegenheid zullen hebben nog andere gevolgen af te leiden.

Indien F(x) *en* f(x) *twee functien voorstellen, welke elk voor* $x = 0$ *verdwijnen, terwijl de afgeleide functie* $f_1(x)$, *voor alle waarden van* x *hetzelfde teeken behoudt, zal de verhouding* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *steeds begrepen zijn tusschen de grootste en kleinste waarden, welke de verhouding der afgeleide functien* $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$, *tusschen de grenzen* 0 *en* x *bekomt.*

Laat, om zulks te betoogen, A de kleinste en B de grootste waarde der verhouding $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$ aanduiden, dan zullen de verschillen $\frac{F_1(x)}{f_1(x)} - A$, $\frac{F_1(x)}{f_1(x)} - B$, klaarblijkelijk met tegengestelde teekens aangedaan zijn; en zulks zal met de verschillen

$$F_1(x) - A\,f_1(x), \qquad F_1(x) - B\,f_1(x)$$

evenzeer het geval moeten wezen, uithoofde $f_1(x)$ ondersteld wordt niet van teeken te veranderen.

Daar nu deze grootheden respectivelijk de eerste afgeleide functien zijn van de verschillen

$$F(x) - A\,f(x), \qquad F(x) - B\,f(x),$$

zoo zal, volgens § 7, eene dezer laatste grootheden steeds aangroeijende, en het andere steeds afnemende zijn; of, omdat elke derzelven voor $x = 0$ verdwijnt, zal het eene verschil eene positieve en het andere eene negatieve waarde behouden; en aangezien $f(x)$, volgens de aangenomen onderstelling, insgelijks eene positieve of negatieve waarde behoudt, zullen de verschillen

$$\frac{F(x)}{f(x)} - A, \qquad \frac{F(x)}{f(x)} - B$$

evenzeer met tegengestelde teekens zijn aangedaan, waaruit ter-

stond afgeleid wordt, dat de verhouding $\frac{F(x)}{f(x)}$ tusschen A en B moet begrepen zijn. Daar nu de verhouding der afgeleide functiën $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$, tusschen 0 en x achtervolgens alle waarden verkrijgt gelegen tusschen A en B, zal er noodzakelijk met elke waarde van x, eene kleinere $ix = x'$ overeenstemmen, i een positief getal < 1 zijnde, waardoor aan de vergelijking

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F_1(ix)}{f_1(ix)} = \frac{F_1(x')}{f_1(x')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

kan worden voldaan.

Zijn de functiën $F(x)$, $f(x)$ van dien aard, dat ook hare afgeleide $F_1(x)$, $f_1(x)$ voor $x = 0$ verdwijnen, dan zal men, volgens het zoo even betoogde, mogen stellen

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \frac{F_2(x')}{f_2(x')}$$

en dus

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F_2(ix)}{f_2(ix)}.$$

In het algemeen, indien $F(x)$, $f(x)$, even als hare $n-1$ afgeleide functiën

$$F_1(x),\ F_2(x) \ldots F_{n-1}(x)$$

$$f_1(x),\ f_2(x) \ldots f_{n-1}(x)$$

gelijktijdig voor $x = 0$ verdwijnen, en $f_n(x)$ hetzelfde teeken behoudt tusschen 0 en x, zal men uit het voorgaande mogen besluiten

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F_n(ix)}{f_n(ix)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin i eeniglijk een positief getal < 1 voorstelt.

Schrijven wij thans in de verg. (1) voor $F(x)$, $F(a+h) - F(a)$, en voor $f(x)$, $f(a+h) - f(a)$, h het veranderlijke element zijnde, dan voldoen deze functiën aan de aangenomen onderstelling om voor $h = 0$ te verdwijnen. De afgeleide functiën zijn thans $F_1(a+h)$, $f_1(a+h)$; en zoo nu deze laatste hetzelfde teeken behoudt tusschen de grenzen a en $a+h$, kunnen wij, op grond der verg. (1) tot deze meer algemeene besluiten,

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{f(a+h) - f(a)} = \frac{F_1(a+ih)}{f_1(a+ih)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

In het bijzonder geval, waarin $F(a)=0$, $f(a)=0$, komt er

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{F_1(a+ih)}{f_1(a+ih)}.$$

Derhalve

$$Lim.\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{F_1(a)}{f_1(a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

of, indien tevens de $n-1$ achtervolgende afgeleide functiën voor $x=a$ verdwijnen, heeft men

$$Lim.\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{F_n(a)}{f_n(a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waardoor de hiervoren vermelde eigenschap bewezen is.

§ 42. De vergelijking (4) kan ook gemakkelijk uit eene meetkunstige beschouwing afgeleid worden. Laten namelijk AM, Am (fig. 4) twee kromme lijnen voorstellen tot vergelijkingen hebbende $y=F(x)$, $y=f(x)$, en zich snijdende in het punt A, gelegen op de as der abscissen. Zij $OA=a$, en $OP=x$ de gemeenschappelijke abscis der punten M, m. Men stelle nog $AP=x-a=h$, dan heeft men

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{MP}{mP}=\frac{tg.MAP}{tg.mAP}.$$

Nu heeft men $F(a)=0$, $f(a)=0$, en blijkbaar zal de limiet der verhouding $\frac{F(a+h)}{f(a+h)}$, bij vermindering van h, overeenkomen met de verhouding der tangenten van de hoeken, welke de raaklijnen der beide krommen in het snijpunt A, met de as der x vormen.

Derhalve $$Lim.\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{F_1(a)}{f_1(a)}.$$

De omstandigheid dat $F_1(a)$, $f_1(a)$ insgelijks beiden nul worden, zal plaats hebben, indien de as OX zelve eene gemeenschappelijke raaklijn aan het punt A der twee krommen wordt. Wij zullen later bij de behandeling van de theorie der kromme lijnen, de meetkunstige beteekenis doen kennen van het geval, waarin tevens de tweede en hoogere afgeleide functiën, voor $x=a$, verdwijnen.

§ 43. Het voorgaande leidt ons thans tot den navolgenden regel voor het bepalen der wezenlijke waarde van eenig gebroken $\frac{X}{X'}$, waarvan teller en noemer functiën eener veranderlijke grootheid x voorstellen, die elk, voor eene bijzondere waarde $x=a$, nul worden.

Men differentiëre teller en noemer ten opzigte van x *zoo vele achtervolgende malen als noodig is om afgeleide functiën te bekomen, die, voor* x = a, *niet meer verdwijnen; dan zal het quotient dezer laatste functiën de waarde van het gebroken doen kennen.*

Bijaldien slechts eene dezer functiën eene eindige waarde verkrijgt, terwijl de andere nul blijft, zal het gebroken nul of oneindig worden, naardat de noemer of de teller het eerst eene eindige afgeleide functie oplevert.

Deze regel is evenzeer toepasselijk op het geval van $a = \infty$. Immers, schrijvende in de functiën $F(x)$, $f(x)$ voor x, $\frac{1}{y}$, zoo heeft men

$$\frac{X}{X'} = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Alsdan wordt $X = 0$ en $X_1 = 0$ voor $y = 0$, en men zal nu mogen stellen

$$Lim. \frac{F\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{F_1\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2}}{f_1\left(\frac{1}{y}\right) \frac{1}{y^2}} = \frac{F_1\left(\frac{1}{y}\right)}{f_1\left(\frac{1}{y}\right)}, \text{ voor } y = 0,$$

dus

$$Lim. \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F_1(x)}{f_1(x)}, \text{ voor } x = \infty.$$

Dezelfde regel strekt zich daarenboven op het geval uit, waarin X en X' voor $x = a$ oneindige waarden bekomen, en dus het gebroken $\frac{X}{X'}$ den onbepaalden vorm $\frac{\infty}{\infty}$ aanneemt. Want, stellende dat gebroken onder den vorm,

$$\frac{\frac{1}{X'}}{\frac{1}{X}} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{F(x)}},$$

waarin nu teller en noemer voor $x = a$ nul worden, dan heeft men volgens den voorgaanden regel.

$$Lim. \frac{X}{X'} = \frac{f_1(x)}{F_1(x)} \cdot \frac{F^2(x)}{f^2(x)} = \frac{f_1(x)}{F_1(x)} \cdot \frac{X^2}{X'^2},$$

waaruit onmiddelijk afgeleid wordt,

$$lim. \frac{X}{X'} = lim. \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F_1(x)}{f_1(x)} \text{ voor } x = a,$$

welke uitkomst insgelijks geldig zal zijn voor het geval van $a = \infty$.

§ 44. Wij laten thans eenige voorbeelden volgen ter toepassing van den zoo even gegeven algemeenen regel.

1° $$\frac{X}{X'} = \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} \text{ voor } x = a,$$

$$\frac{dX}{dx} = nx^{n-m}, \quad \frac{dX'}{dx} = mx^{m-1},$$

$$\frac{dX}{dX'} = \frac{n}{m} x^{n-m},$$

dus $$\frac{X}{X'} = \frac{n}{m} a^{n-m},$$

even als reeds vroeger (§ 40) langs eenen anderen weg gevonden is.

2°. $$\frac{X}{X'} = \frac{x^n - a^n}{n} \quad \text{voor } n = 0.$$

Daar n hier het veranderlijke element voorstelt, heeft men

$$\frac{dX}{dn} = x^n\, l(x) - a^n\, l(a), \qquad \frac{dX'}{dn} = 1.$$

dus $$\frac{dX}{dX'} = x^n\, l(x) - a^n\, l(a),$$

en $$\frac{X}{X'} = l(x) - l(a) = l\left(\frac{x}{a}\right).$$

3°. $$\frac{X}{X'} = \frac{x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^6}{x^3 - 3a^2x + 2a^3} \quad \text{voor } x = a.$$

$$\frac{dX}{dx} = 4x^3 - 6ax^2 + 4a^2x - 2a^3.$$

$$\frac{dX'}{dx} = 3x^2 - 3a^2.$$

Deze uitdrukkingen wederom nul wordende voor $x = a$, zoo geeft eene tweede differentiatie

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 12x^2 - 12ax + 4a^2,$$

$$\frac{d^2X'}{dx^2} = 6x.$$

dus $$\frac{X}{X'} = \frac{12x^2 - 12ax + 4a^2}{6x} = \frac{4a^2}{6a} = \frac{2}{3}a.$$

4°. $$\frac{X}{X'}=\frac{\sqrt{(a^2+ax+x^2)}-\sqrt{(a^2-ax+x^2)}}{\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a-x)}},\quad \text{voor } x=0,$$

$$\frac{dX}{dx}=\frac{a+2x}{2\sqrt{(a^2+ax+x^2)}}+\frac{a-2x}{2\sqrt{(a^2-ax+x^2)}}=1,$$

$$\frac{dX'}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{(a+x)}}+\frac{1}{2\sqrt{(a-x)}}=\frac{1}{\sqrt{a}},$$

$$\frac{X}{X'}=\sqrt{a}.$$

5°. $$\frac{X}{X'}=\frac{log.\,x}{x},\quad \text{voor } x=\infty.$$

$$\frac{X}{X'}=\frac{dX}{dX'}=\frac{M}{x}=0,$$

Deze uitkomst leert tevens, dat voor toenemende waarden van eenig getal x, de logarithmus minder snel aangroeit, dan het getal zelf.

6°. $$\frac{X}{X'}=\frac{a^x}{x},\quad \text{voor } x=\infty,$$

$$\frac{X}{X'}=\frac{dX}{dX'}=\frac{a^x\,l(a)}{1}=\infty,\ a>1 \text{ zijnde.}$$

7°. $$\frac{X}{X'}=\frac{l(x)}{cot.\,x},\quad \text{voor } x=0,$$

$$\frac{X}{X'}=\frac{dX}{dX'}=-\frac{sin^2x}{x}=\frac{0}{0},$$

$$\frac{X}{X'}=\frac{d^2X}{d^2X'}=-\frac{2\,sin.\,x\,cos.\,x}{1}=0.$$

8°. $$\frac{X}{X'}=\frac{x^a}{e^x}\quad \text{voor } x=\infty.$$

Zij a een positief getal, gelegen tusschen de geheele getallen $n-1$ en n, dan heeft men, na n achtervolgende differentiatiën

$$\frac{d^nX}{dx^n}=a(a-1)\ldots(a-n+1)\,x^{a-n},$$

$$\frac{d^nX'}{dx^n}=e^x.$$

dus $$\frac{X}{X'}=\frac{a\,(a+1)\ldots(a-n+1)}{x^{n-a}.\,e^x}=0,$$

zoodat de noemer van het gebroken veel sneller toeneemt dan de teller.

§ 45. Het aantal differentiatiën, dat in sommige gevallen vereischt wordt om de waarde van eenig gebroken $\frac{X}{X'}$, onder den vorm $\frac{0}{0}$ te kunnen bepalen, is eeniglijk afhankelijk van den exponent des gemeenschappelijken factors $x - a$ in teller en noemer voorkomende. Zulks laat zich terstond afleiden uit de reeds in § 33 gemaakte opmerking, dat namelijk indien $X = (x-a)^m \varphi(x)$, en $X' = (x-a)^m \chi(x)$ is, m een geheel positief getal zijnde, alsdan al de afgeleide functiën tot die der m—1 orde ingesloten, voor $x = a$ zullen verdwijnen. Het gebroken in ons 3^e voorbeeld opgegeven, heeft twee achtervolgende differentiatiën gevorderd, en werkelijk is ook $(x-a)^2$ een gemeenschappelijke factor van teller en noemer, vermits

$$X = (x-a)^2(x^2 + a^2) \quad \text{en} \quad X' = (x-a)^2(x + 2a).$$

Even zoo zal het blijken dat men teller en noemer van het gebroken

$$\frac{X}{X'} = \frac{x^3 - 4\,ax^2 + 7\,a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{(2ax - a^2)}}{{}^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{(2)}\,ax - x^2)},$$

hetwelk, voor $x = a$, overgaat in $\frac{0}{0}$, vier achtervolgende malen zal hebben te differentiëren, alvorens tot de wezenlijke waarde $-5a$ te kunnen geraken.

De functiën X, X' zouden dan ook hier elk door $(x-a)^4$ algebraïsch deelbaar behooren te zijn, hetgeen evenwel onder haren eindigen vorm niet mogelijk is. Indien men echter daar in x door $a + h$ vervangt, en de irrationale termen vervolgens in reeksen naar de opklimmende magten van h ontwikkelt, zal men, na eenige herleidingen bevinden, dat teller en noemer met den gemeenen factor h^4 aangedaan, en alzoo door $(x-a)^4$ deelbaar zijn. Na het weglaten van dien factor, en door vervolgens in de overige termen $h = 0$ te stellen, zou men insgelijks $-5a$ tot limiet van het quotient bekomen. Wij bepalen ons hier bij deze beknopte aanwijzing, aan den lezer de uitwerking van elke dezer twee verschillende handelwijzen overlatende.

Mogt echter de exponent van den gemeenen factor $(x-a)^m$, een gebroken zijn tusschen de geheele getallen p en $p + 1$ gelegen, zal men, na $p + 1$ differentiatiën, voor $x = a$, oneindig groote waarden voor de afgeleide functien bekomen, en de verdere differentiatiën behooren te staken, dewijl al de volgende afgeleide functiën van X en X' insgelijks oneindig groot worden (§ 32). Men zou in dergelijke gevallen de waarde van $\frac{X}{X'}$ kunnen bepalen door

$x - a = h$ te stellen, en vervolgens tot de ontwikkeling in oneindige reeksen over te gaan, ten einde den factor h^m uit teller en noemer te verdrijven. Het is echter niet onbelangrijk hier te doen opmerken, dat de toepassing dezer omslagtige handelwijze dikwerf vermeden kan worden, vermits men het quotient der afgeleide functien die het eerst oneindig worden, na eenige herleiding, tot den vorm $\frac{0}{0}$ kan terugbrengen, waarvan de wezenlijke waarde zich alsdan gemakkelijk, zelfs zonder nieuwe differentiatie te verrigten, laat bepalen.

Om het gezegde door een enkel voorbeeld te staven, zoo kiezen wij hiertoe het gebroken

$$\frac{X}{X'} = \frac{a + \sqrt{(2a^2 - 2ax)} - \sqrt{(2ax - x^2)}}{a - x + \sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

hetwelk, voor $x = a$, overgaat in $\frac{0}{0}$.

Eene eerste differentiatie geeft

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{a}{\sqrt{2(a^2 - ax)}} - \frac{a - x}{\sqrt{(2ax - x^2)}},$$

$$\frac{dX'}{dx} = -1 - \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Men ziet dat elke dezer afgeleide functiën, voor $x = a$, oneindig wordt. De verhouding $\frac{dX}{dX'}$ welke, in die onderstelling, dezelfde limiet tot waarde bekomt als het gegeven gebroken, kan echter ook aldus worden geschreven:

$$\frac{a\sqrt{(2ax - x^2)} + (a - x)\sqrt{2(a^2 - ax)}}{\left(x + \sqrt{(a^2 - x^2)}\right)\sqrt{(2ax - x^2)}} \times \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2a(a - x)}},$$

welke uitdrukking thans, voor $x = a$, den vorm $\frac{0}{0}$ aanneemt.

Nu wordt de eerste breuk van het voorgaande product $= 1$, terwijl de tweede breuk, na weglating van den gemeenen factor $\sqrt{(a - x)}$ overgaat in $\sqrt{\frac{a+x}{2a}}$. De substitutie van $x = a$, geeft terstond $\sqrt{\frac{2a}{2a}} = 1$, voor de gezochte waarde van het opgegeven gebroken. Deze uitkomst zoude minder gemakkelijk uit de ontwikkeling in reeksen verkregen zijn.

§ 46. Elk gebroken van den vorm

$$\frac{X}{X'} = \frac{Ax^n + Bx^{n-1} \ldots\ldots + Tx + U}{A_1x^m + B_1x^{m-1} \ldots\ldots + T_1x + U_1},$$

waarin n en m positieve getallen aanduiden, neemt voor $x = \infty$, den vorm $\frac{\infty}{\infty}$ aan, en zal tot limiet hebben $\frac{A}{A_1}$, 0 of ∞, naar dat $n = m$, $n < m$ of $n > m$ is. Want, stellende $x = \frac{1}{y}$, dan gaat het gebroken over in

$$\frac{A + By \ldots\ldots + Ty^{n-1} + Uy^n}{A_1 + B_1 y \ldots\ldots + T_1 y^{m-1} + U_1 y^m} \times y^{m-n},$$

Voor $x = \infty$ wordt $y = 0$; zoodat de limiet van het gebroken is $\frac{A}{A_1} \cdot y^{m-n}$, en dus $\frac{A}{A_1}$, 0 of ∞, naar dat $n = < \text{ of } > m$ is.

§ 47. Beschouwen wij thans de grootheden die eenen der vormen $0 \times \infty$, $\infty - \infty$ aannemen. Wat den eersten betreft, ziet men terstond in, dat die vorm altijd tot het quotient $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ terug te brengen is, en alzoo geene afzonderlijke behandeling vordert. Aldus zal bijv. het product $nx \cot. mx$, dat voor $x = 0$, overgaat in $0 \times \infty$, onder den vorm $\frac{nx}{tg. mx}$ kunnen geschreven worden, en mitsdien tot limiet hebben $\frac{n}{m} \cos.^2 mx = \frac{n}{m}$; welke uitkomst ook, zonder differentiatie, had kunnen verkregen worden, door het gebroken onder den vorm $\frac{n}{m} \cdot \frac{mx}{tg. mx}$ voor te stellen, en op te merken dat de betrekking tusschen eenen oneindig kleinen boog en zijnen tangens tot limiet heeft de eenheid.

Nemen wij tot een tweede voorbeeld $x \log. x$, welk product voor $x = 0$, insgelijks overgaat in $0 \times \infty$. Schrijvende hetzelve echter onder den vorm $\frac{X}{X'} = \frac{\log. x}{\frac{1}{x}}$, waardoor het in $\frac{\infty}{\infty}$ verandert, dan geeft de differentiatie van teller en noemer, voor de waarde van dat gebroken

$$\frac{dX}{dX'} = -\frac{M}{x} : \frac{1}{x^2} = -Mx = 0,$$

zoodat het product $x \log. x$ meer en meer tot nul nadert, naarmate x kleiner genomen wordt.

Het zal op gelijke wijze blijken, dat, in het algemeen, het product $x^m \log. x$, voor $x = 0$, evenzeer nul tot limiet heeft.

Elke uitdrukking van den vorm $\infty - \infty$ zal altijd tot dien van $\frac{0}{0}$ te herleiden zijn, en dus voor eene der voorgaande handelwijzen vatbaar zijn.

Nemen wij tot voorbeeld de grootheid

$$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{l(x)},$$

welke, voor $x=1$, den bedoelden vorm aanneemt. Nu laat zich deze uitdrukking ook aldus schrijven:

$$\frac{x\,l(x)-x+1}{(x-1)\,l(x)}=\frac{0}{0}.$$

Hierop den gewonen regel toepassende, vinden wij voor de waarde van dat gebroken,

$$\frac{l(x)}{1-\frac{1}{x}+l(x)}=\frac{0}{0}, \text{ voor } x=1.$$

Door eene volgende differentiatie bekomen wij echter,

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2},$$

voor de waarde van het opgegeven verschil.

§ 48. De uitdrukking $X^{X'}$ kan zich, voor eene bijzondere waarde van x, onder een' dezer drie vormen 0^0, ∞^0, 1^∞ voordoen. Door de waarde van haren logarithmus $X'l(X)$ te bepalen, zal men spoedig tot die van den exponentialen vorm geraken. Zij bijv. de functie x^x, voor $x=0$ overgaande in 0^0, dan heeft men, volgens het reeds hiervoren gevondene, $x\,l(x)=0$; derhalve $x^x=1$ voor $x=0$.

De uitdrukking $\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}$ wordt voor $x=\infty$, ∞^0. Haar logarithmus is $\frac{l(x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}$. Na differentiatie van teller en noemer, komt er voor de waarde van dat gebroken $\frac{1}{x}=0$, dus $x^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

Voor $x=1$ wordt de grootheid $x^{\frac{1}{1-x}}=1^\infty$, waarvan de logarithmus $\frac{l(x)}{1-x}$ in $\frac{0}{0}$ overgaande, alsdan tot waarde heeft $-\frac{1}{x}=-1$.

Derhalve bekomt deze exponentiale grootheid, voor $x=1$, waarde $e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Beschouwen wij eindelijk nog de uitdrukking

$$(1+mx)^{\frac{n}{x}},$$

welke, voor $x=0$, insgelijks in 1^∞ verandert, en tot logarithmus heeft

$$\frac{n\,l(1+mx)}{x}=\frac{0}{0}.$$

Na differentiatie van teller en noemer komt er voor de waarde van dezen logarithmus

$$\frac{mn}{1+mx} = mn, \text{ voor } x = 0,$$

dus is de gezochte waarde e^{mn}.

Men zou dezelfde uitkomst ook hebben kunnen afleiden, uit de ontwikkeling van het binominm $(1+mx)^{\frac{1}{x}}$, op de wijze als zulks in onze *Lessen over de hoogere algebra*, § 243, aangetoond is.

§ 49. Ten besluite dezer les voegen wij hier nog een aantal voorbeelden bij, welke ter verdere oefening in het thans behandelde onderwerp kunnen strekken.

1. $\frac{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}{x^2} = \frac{1}{2a}$, voor $x = 0$.

2. $\frac{\sqrt{(x^3+a^3)}}{x+a} = \infty$, voor $x = -a$.

3. $\frac{x^4-ax^3-6a^2x^2-5a^3x-a^4}{x^4+ax^3+a^2x^2+3a^3x+2a^4} = \frac{3}{4}$, voor $x = -a$.

4. $\frac{a+x+\sqrt{(a^2+x^2)}}{a-x-\sqrt{(a^2+a^2)}} = -1$, voor $x = \infty$.

5. $\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} = \frac{n(n+1)}{2}$, voor $x = 1$.

6. $\frac{x+x^3-(2n+1)x^{2n+1}+(2n-1)x^{2n+3}}{(1-x^2)^2} = n^2$, voor $x = 1$.

7. $\frac{x^2-3ax+a^2-a^3+2ax^2-x^2\sqrt{(ax-x-a+1)}}{x\sqrt{(2ax-x^2)}-a\sqrt{(2a^2+2ax)}+x^2} = \frac{3a+2}{5}$, voor $x = a$.

8. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, voor $x = a$.

9. $\frac{a^n-x^n}{l(a)-l(x)} = na^n$, voor $x = a$.

10. $\frac{a-x-a\,l\left(\frac{a}{x}\right)}{a-\sqrt{(2ax-x^2)}} = -1$, voor $x = a$.

11. $\frac{e^x-e^{-x}}{l(1+x)} = 2$, voor $x = 0$.

12. $\dfrac{e^x - l.(1+x) - 1}{x^2} = 1$, voor $x = 0$.

13. $\dfrac{1 - sin.\, x + cos.\, x}{sin.\, x + cos.\, x - 1} = 1$, voor $x = \dfrac{\pi}{2}$.

14. $\dfrac{x^x - x}{1 - x + l(x)} = -2$, voor $x = 1$.

15. $\dfrac{l(x)}{x^n} = 0$, voor $x = \infty$.

16. $\dfrac{l.(1+x)}{x^n} = \infty, 1$ of 0, voor $x = 0$, naar dat $n > 1, = 1$, of < 1 is.

17. $\dfrac{1 - cos.\, x}{x^n} = \infty, \dfrac{1}{2}$ of 0, voor $x = 0$, naar dat $n > 2, = 2$ of < 2 is.

18. $(1 - x) tg. \dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{2}{\pi}$, voor $x = 1$.

19. $tg.\, (45^0 + x)\, cot.\, 2x = 2$, voor $x = \dfrac{\pi}{4}$.

20. $sec.\, x - tg.\, x = 0$, voor $x = \dfrac{\pi}{2}$.

21. $\dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)} - \dfrac{1 - \pi x}{2x^2} = \dfrac{1}{6}\pi^2$, voor $x = 0$.

22. $\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{\pi}{2x\, tg.\, \pi x} = \dfrac{1}{6}\pi^2$, voor $x = 0$.

23. $\sqrt[x]{2^{x+1}} = 2$, voor $x = \infty$.

24. $xe^{\frac{1}{x}} = 0$, voor $x = \infty$.

25. $(Ax^m + Bx^{m-1} \ldots\ldots + U)^{\frac{1}{x}} = 1$, voor $x = \infty$.

Hernemen wij te dien einde de reeds in § 41 betoogde algemeene verhouding

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{f(a+h)-f(a)}=\frac{F_1(a+ih)}{f_1(a+ih)} \quad \ldots\ldots (4)$$

waarbij eeniglijk verondersteld wordt, dat $F(x)$ en $f(x)$, even als hare afgeleide $F_1(x)$, $f_1(x)$, onafgebroken functien zijn tusschen a en $a+h$, en daarenboven de afgeleide functie $f_1(x)$ tusschen dezelfde grenzen niet van teeken verandere.

Indien $F(x)$ en $f(x)$ beiden voor $x=a$ verdwijnen, heeft men

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{F_1(a+ih)}{f_1(a+ih)}. \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Onderstellen wij echter dat die functiën voor $x=a$ niet verdwijnen, maar dat zulks wel het geval zij, met hare $n-1$ achtervolgende afgeleide functiën, dan zal men uit de vergel. (4) en (5) gemakkelijk tot de navolgende besluiten

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{f(a+h)-f(a)}=\frac{F_n(a+ih)}{f_n(a+ih)} \quad \ldots\ldots (6)$$

zijnde hierin i steeds een getal <1, waarvan echter de waarde verschillend is van die, welke in de gemelde vergelijkingen voorkomt.

De voorgaande vergelijking onderstelt nu dat $F(x)$ en $f(x)$, even als hare afgeleide functiën tot $F_n(x)$, $f_n(x)$ ingesloten, onafgebroken functiën zijn tusschen de grenzen a en $a+h$, en dat bovendien elke der afgeleide functiën $f_1(x)$, $f_2(x)$,... $f_n(x)$ daarbij hetzelfde teeken behoudt.

Men kan aan die voorwaarden, voor zoo veel $f(x)$ betreft, onder anderen voldoen, door te stellen

$$f(x)=(x-a)^n.$$

Hieruit volgt namelijk

$$f_1(x)=n\,(x-a)^{n-1}, \qquad f_2(x)=n.(n-1)\,(x-a)^{n-2},$$

$$f_{(n-1)}(x)=n\,(n-1)\,(n-2)\,..\,1\,(x-a)$$

en $$f_n(x)=f_n(a+ih)=1.2.3\ldots n,$$

zoodat $f(a)$, $f_1(a)$, $f_{n-1}(a)$ gelijktijdig verdwijnen, terwijl $f_n(a)$ eene standvastige waarde behoudt. Wijders wordt $f(a+h)=h^n$, zoodat de vergelijk. (6) thans overgaat in

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h^n}=\frac{F_n(a+ih)}{1.2.3..n}.$$

of $$F(a+h)-F(a)=\frac{h^n}{1.2.3...n}F_n(a+ih). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Voor $n=1$, heeft men

$$F(a+h)-F(a)=h\,F_1(a+ih).$$

Het is klaar, dat men hierin aan a tevens de veranderlijke waarde x kan geven, en daarbij h als standvastig beschouwen, hetgeen op de waarde der afgeleide functie geen' invloed heeft. Men kan dienvolgens stellen

$$F(x+h)-F(x)=h\,F_1(x+ih) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welke vergelijking thans aan de eenige voorwaarde verbonden is, dat $F(x)$ en $F_1(x)$ onafgebrokene functiën blijven tusschen de grenzen x en $x+h$ (*).

§ 52. Stellen wij thans $hF_1(x+ih)=h\,F_1(x)+\varphi(h)$, dan zal, ingevolge de verg. (8)

$$\varphi(h)=F(x+h)-F(x)-hF_1(x)$$

eene functie van h aanwijzen, welke, even als hare eerste afgeleide $F_1(x+h)-F_1(x)$, tegelijk met h verdwijnt, en tot tweede afgeleide heeft $F_2(x+h)$.

Merken wij hierbij op, dat het voorste lid van verg. (7) insgelijks eene functie van h voorstelt, die, even als hare eerste afgeleide $F_1(a+h)$, voor $h=0$, verdwijnt, dewijl $F_1(a)=0$ ondersteld is. Neemt men $n=2$, dan wordt de tweede afgeleide fuuctie daarbij ondersteld niet voor $a=0$ te verdwijnen, zoodat wij, volgens het tweede lid der verg. (7), met toepassing op $\varphi(h)$, mogen stellen

(*) Het zal niet ondienstig zijn hier aan te toonen, dat de form. (8) tevens voor een meetkunstig betoog vatbaar is. Laten de punten M, M' in de figuren 1 en 2 tot de abscissen x en $x+h$ behooren, waarmede de ordinaten $F(x)$ en $F(x+h)$ overeenstemmen, en zij ψ de hoek door de koorde MM' met de as der abscissen gevormd, dan heeft men blijkbaar

$$F(x+h)-F(x)=h\,tg.\,\psi.$$

In fig. 1 snijden de raaklijnen aan de punten M, M' de gemelde as onder hoeken die respectievelijk kleiner en grooter zijn dan de hoek ψ, terwijl in fig. (2) het tegenovergestelde plaats vindt. Daar echter die hoeken, tusschen de grenzen x en $x+h$ op eene onafgebrokene wijze toenemen of afnemen, zoo is het klaar, dat er noodzakelijk eene abscis $x+h_1 < x+h$ zal aan te wijzen zijn, voor welke $F_1(x+h_1)$ dezelfde waarde als $tg.\,\psi$ verkrijgt, of met andere woorden, dat er tusschen M en M' een punt aanwezig zal zijn, alwaar de raaklijn evenwijdig aan de koorde MM' loopt. Derhalve heeft men

$$F(x+h)-F(x)=h\,F_1(x+ih);$$

door ih wederom eene grootheid $< h$ verstaande.

$$F(x+h)-F(x)-hF_1(x)=\frac{h^2}{1.2}F_2(x+ih)=\frac{h^2}{1.2}F_2(x)+\varphi'(h)$$

dus wordt

$$\varphi'(h)=F(x+h)-F(x)-hF_1(x)-\frac{h^2}{1.2}F_2(x),$$

eene functie van h, die even als hare afgeleiden van de eerste en tweede orde,

$$F_1(x+h)-F_1(x)-hF_2(x),\quad F_2(x+h)-F_2(x),$$

tegelijk met h verdwijnt, en tot afgeleide der derde orde heeft $F_3(x+h)$.

Op grond van verg. (7), waarin nu $n=3$ te stellen is, en waarvan het voorste lid alsdan dezelfde eigenschappen bezit als $\varphi'(h)$, mogen wij dus stellen

$$F(x+h)-F(x)-hF_1(x)-\frac{h^2}{1.2}F_2(x)=\frac{h^3}{1.2.3}F_3(x+ih),$$

of $$F(x+h)=F(x)+hF_1(x)+\frac{h^2}{1.2}F_2(x)+\frac{h^3}{1.2.3}F_3(x+ih).$$

Op gelijke wijze voort redenerende, komt men van zelve tot de algemeene formule

$$F(x+h)=F(x)+hF_1(x)+\frac{h^2}{1.2}F_2(x)+\ldots$$

$$+\frac{h^{n-1}}{1.2..n-1}F_{n-1}(x)+\frac{h^n}{1.2..n}F_n(x+ih). \quad (9)$$

welke niets anders dan de reeks van Taylor, doch onder eenen eindigen vorm voorstelt, zoodat de laatste term

$$\frac{h^n}{1.2.3...n}F_n(x+ih)$$

de gezochte uitdrukking oplevert voor de som van al de termen, die op den n^{den} term volgen.

Kent men nu de grootste en kleinste waarden A en B van de n^e afgeleide functie $F_n(x+h)$, dan stellen

$$\frac{Ah^n}{1.2..n},\ \text{en}\ \frac{Bh^n}{1.2..n}$$

de beide grenzen voor, tusschen welke de som der weggelatene termen begrepen blijft, en hierdoor zal men tevens den graad van benadering der waarde van $F(x+h)$ kunnen bepalen, bijaldien de reeks slechts tot den n^{den} term wordt voortgezet.

Voor de reeks van MACLAURIN, vindt men dus onmiddelijk, door in de voorgaande $x = 0$, en $h = x$ te stellen,

$$F(x) = F(0) + xF_1(0) + \frac{x^2}{1.2}F_2(0)..+\frac{x^n}{1.2..n}F_n(ix) \quad . \quad . \ (10)$$

waarin $\frac{x^n}{1.2..n}F_n(ix)$ de som der $(n+1)^s$ en volgende termen der reeks aanwijst.

Indien nu de grootheden

$$\frac{h^n}{1.2.3..n}F(x+ih), \quad \frac{x^n}{1.2.3..n}F(0),$$

bij toenemende waarden van n, meer en meer tot nul naderen, zullen de ontwikkelingen (9) en (10) de oneindig voortloopende reeksen van TAYLOR en MACLAURIN opleveren, welke alsdan respectievelijk $F(x+h)$ en $F(x)$ tot som of limiet verkrijgen.

Deze omstandigheid zal altijd plaats hebben, ingeval al de afgeleide functiën, voor alle waarden van n, eindige waarden behouden tusschen x en $x+h$, en dus ook voor $x = 0$. Immers, de factor $\frac{h^n}{1.2..n}$ zal, voor eindige waarden van h, meer en meer tot nul naderen, hetgeen blijken kan door deze grootheid te schrijven onder den vorm van een gedurig product

$$\frac{h}{1}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{3}\cdots\frac{h}{p}\cdot\frac{h}{p+1}\cdots\frac{h}{n},$$

waarin p en $p+1$ de twee geheele getallen aanduiden, tusschen welke h begrepen is. Daar elke der breuken volgende op $\frac{h}{p}$ nu < 1 wordt, zal derzelver product noodzakelijk nul tot limiet hebben.

§ 53. Elke functie van x zal alzoo met behulp der reeks van MACLAURIN, volgens de opklimmende geheele magten van x kunnen ontwikkeld worden, zoodra die functie, tegelijk met hare afgeleiden van verschillende orden, tusschen 0 en x onafgebroken is.

Bijaldien het vooraf bekend is, dat $F(x)$ en $F(x+h)$ volgens dergelijke convergerende reeksen kunnen ontwikkeld worden, zullen die reeksen met die van MACLAURIN en TAYLOR moeten overeenstemmen. Om zulks aan te toonen, stelle men

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \text{enz.}$$

dan vindt men door achtervolgende differentiatiën,

$$F_1(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots$$
$$F_2(x) = 2a_2 + 2.3.a_3x + 3.4a_4x^2 + \ldots$$

$$F_2(x) = 2.3.a_3 + 2.3.4\,a_4 x + \ldots$$
$$F_3(x) = 2.3.4\,a_4 + \ldots$$
enz. enz.

waaruit terstond volgt

$$F(0) = a_0, \quad F_1(0) = a_1, \quad F_2(0) = 2a_2, \quad F_3(0) = 2.3a_3,$$

en in het algemeen

$$F_n(o) = 1.2.3\ldots n\,a_n.$$

Derhalve

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1}F_1(0) + \frac{x^2}{1.2}F_2(0) + \frac{x^3}{1.2.3}F_3(0) + \text{enz.} \quad . \quad (11)$$

zijnde de reeks van MACLAURIN. Die van TAYLOR kan nu daaruit als een onmiddellijk gevolg afgeleid worden.

Immers zij $F(x) = f(x+h)$, dan heeft men, h hierbij standvastig aannemende,

$$F_1(x) = f_1(x+h). \qquad F_2(x) = f_2(x+h) \text{ enz.}$$

Derhalve

$$F(0) = f(h), \qquad F_1(0) = f_1(h), \qquad F_2(0) = f_2(h),$$

waardoor de vorige reeks overgaat in

$$f(x+h) = f(h) + x f_1(x) + \frac{x^2}{1.2}f_2(h) + \frac{x^3}{1.2.3}f_3(h)\ldots$$

en hierin h en x onderling verwisselende, komt er wederom

$$f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + \frac{h^2}{1.2}f_2(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f_3(x) \quad . \quad . \quad (12$$

zijnde de reeks van TAYLOR.

Uit deze laatste laat zich, door voor x te schrijven $a+(x-a)$, nog de navolgende ontwikkeling van $F(x)$ afleiden.

$$F(x) = F(a) + (x-a)F_1(a) + \frac{(x-a)^2}{1\ldots2}F_2(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3}F_3(a) + . \quad (13)$$

waarin nu altijd aan a zoodanige waarde gegeven kan worden, dat $F(a)$, evenmin als hare opvolgende afgeleiden, oneindig worden. De bruikbaarheid dezer reeks vordert intusschen altijd, dat aan de voorwaarden der convergentie voldaan worde.

§ 54. De termen

$$\frac{h^n}{1.2.3\,n}F(x+ih), \qquad \frac{x^n}{1.2.3..n}F(0),$$

welke de resten der reeksen van TAYLOR en MACLAURIN genaamd worden, en als zoodanig de grenzen kunnen aanwijzen van de feilen die men begaat, door zich bij de n eerste termen der reeks te bepalen, zijn vatbaar om nog onder eenen anderen vorm te worden voorgesteld, welke in sommige gevallen het voordeel oplevert van spoediger tot de beslissing aangaande de convergentie der reeks, te kunnen leiden.

Men schrijve namelijk in de reeks (13) voor a, de veranderlijke grootheid z, en noeme $\varphi(z)$ de rest der reeks, volgende op de n eerste termen, dan heeft men de vergelijking

$$\varphi(z) = F(x) - F(z) - (x-z)F_1(z) - \frac{(x-z)^2}{1.2}F_2(z)..-\frac{(x-z)^{n-}}{1.2.n-1}F_{n-1}(z), \tag{2}$$

waarvan het tweede lid voor $z = x$ verdwijnt, zoodat $\varphi(x) = 0$, wordt. Deze vergelijking differentiërende ten opzigte van (z), komt er, uithoofde van de zich onderling vernietigende termen,

$$\varphi_1(z) = -\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2..n-1}.F_n(z).$$

Wijders is, volgens form. (8)

$$\varphi(z) = \varphi(x) + (z-x)\,\varphi_1(x+i(z-x)),$$

of omdat $\varphi(x) = 0$ is,

$$\varphi(z) = (z-x)\,\varphi_1\left(x+i(z-x)\right).$$

Schrijvende nu in de hiervoren gevondene waarde van $\varphi_1(z)$, voor z, $x+i(z-x)$, dan vindt men terstond voor de gezochte waarde der rest in de ontwikkeling van $F(x)$,

$$\varphi(z) = \frac{i^{n-1}(x-z)^n}{1.2..\ n-1}.F_n\left(x+i(z-x)\right)$$

$$= \frac{i^{n-1}(x-z)^n}{1.2..\ n-1}.F_n\left(z+(1-i)(x-z)\right).$$

Daar i hier weder een getal <1 beteekent, zoo belet niets om i in de vorige formule door $1-i$ te vervangen, zoodat wij ook mogen stellen,

$$\varphi(z) = \frac{(1-i)^{n-1}(x-z)^n}{1.2..\ n-1}.F_n\left(z+i(x-z)\right),$$

i dezelfde beteekenis als voren behoudende. Aldus komt er voor de ontwikkeling van $F(x)$, de meer algemeene reeks

$$F(x) = F(z) + (x-z)F_1(z) + \frac{(x-z)^2}{1.2}F_2(z)\ldots$$

$$+\frac{(1-i)^{n-1}(x-z)^n}{1.2\ldots\ n-1}.F(z+i(x-z))$$

welke, voor $z = 0$, en voor $x - z = h$, achtervolgens overgaat in de twee volgende

$$F(x) = F(0) + xF_1(0) + \frac{x^2}{1.2}F_2(0)\ldots + \frac{(1-i)^{n-1}x^n}{1.2.\ n-1}F_n(ix)$$

$$F(z+h) = F(z) + hF_1(z) + \frac{h^2}{1.2}F_2(z)\ldots + \frac{(1-i)^{n-1}h^n}{1.2\ldots n-1}F_n(z+ih)$$

waarvan de laatste termen thans de resten van de reeksen van MACLAURIN en TAYLOR onder eenen anderen vorm voorstellen, tot vervanging van die, welke hiervoren (§ 52) langs eenen verschillenden weg gevonden zijn, en waarin de breuk i blijkbaar eene andere waarde dan die, welke in de laatst gevondene uitdrukkingen voorkomt, zal hebben. De kennis der waarde van i, in elke dezer resten, wordt echter niet vereischt bij het bepalen van derzelver limiet voor toenemende waarde van n, zoo als nader zal kunnen blijken uit de toepassingen, welke wij, in de volgende les, op eenige bekende functiën zullen maken.

ZEVENDE LES.

Toepassingen der reeksen van MACLAURIN *en* TAYLOR.

§ 55. Beschouwen wij in de eerste plaats de functie

$$y = a^x,$$

gevende (§ 19) $F_1(x) = a^x l(a)$. $F_2(x) = a^x l^2(a) \ldots F_n(x) = a^x l^n(a)$,
dus $F(0) = 1$, $F_1(0) = l(a)$, $F_2(0) = l^2(a)$, $\ldots F_n(0) = l^n(a)$.

Met behulp der reeks van MACLAURIN, bekomen wij alzoo, volgens de form. (10), voor de ontwikkeling van a^x in eenen eindigen vorm

$$a_x = 1 + xl(a) + \frac{x^2}{1.2} l^2(a) \ldots + \frac{x^n l^n(a) a^{ix}}{1.2 \ldots n},$$

Daar nu de factor $\frac{(xl(a))n}{1.2 \ldots n}$ in den laatsten term voorkomende, nul tot limiet heeft, zal de oneindig voortloopende reeks, (§ 52) voor alle waarden van x convergerende zijn, en dus a^x tot som hebben.

In het bij zonder geval van $a = e$, komt er

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

insgelijks voor allewaarden van x geldende.

Zij $F(x) = l(1 + x)$, dan heeft men,

$$F_1(x) = \frac{1}{(1+x)}, \quad F_2(x) = -\frac{1}{1+x)^2} \text{ enz.}$$

$$E^n(x) = \pm \frac{1.2 \ldots n-1}{(1+x)^n}, \text{ dus}$$

$F(0) = 0, F_1(0) = 1, F_2(0) = -1 \ldots E_n(0) = \pm 1.2 \ldots n-1.$

Dus $$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{enz.}$$

De rest $\frac{x^n}{1.2 \ldots n} F_n(ix)$ zal tot waarde hebben

$$\pm \frac{x^n}{n(1+ix)^n}$$

Om nu hieruit te beoordeelen of de reeks, voor alle waarden van

x convergerende is, onderstellen wij vooreerst, x positief en < 1, dan wordt de breuk $\frac{x}{1+ix}$ blijkbaar < 1. De rest nadert dus tot nul, en de reeks zal geldig zijn voor alle positieve waarden van $x < 1$. Voor $x = 1$, zal men tot hetzelfde besluit komen. Stelt men daarentegen $x > 1$, dan zal de divergentie der reeks reeds daaruit kunnen blijken, dat de verhouding van eenigen term tot zijnen voorgaanden, bij toenemende waarden van n, tot limiet heeft x, en dus een getal > 1.

Bij het onderzoek der negatieve waarden van x, zal men, na verandering van het teeken van x uit de breuk

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1-ix}\right)^n,$$

voor waarden van $x < 1$, bij de onbekendheid van het getal i, bezwaarlijk kunnen opmaken of $x >$ of $< 1 - ix$ is. In dit geval zal men zich met meer vrucht van den tweeden vorm der rest, te weten

$$\frac{(1-i)^{n-1}x^n}{1.3\ldots n-1}.F_n(ix) = \frac{(1-i)^{n-1}.x^n}{(1+ix)^n}$$

kunnen bedienen.

Hierin $-x$ voor x stellende, en in aanmerking nemende dat de breuk $\frac{x-ix}{1-ix} < 1$ wordt, zoo blijkt dat de rest

$$\left(\frac{x-ix}{1-ix}\right)^{n-1}.\frac{x}{1-ix}$$

voor $n = \infty$, nul tot limiet heeft.

Stel men nog $x = 1$, dan wordt de rest $\frac{1}{1-i}$, en dus niet nul. Men besluit uit het voorgaande, dat de reeks

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{enz.}$$

geldig is, zoo wel voor alle waarden van x, gelegen tusschen de grenzen -1 en $+1$, als voor $x = 1$.

Dezelfde uitkomst kan ook met behulp der reeks van TAYLOR, aldus verkregen worden.

Zij $F(x) = l(x)$, dus $F_1(x) = \frac{1}{x}$, $F_2(x) = -\frac{1}{x^2}$,

$$F_n(x) = \pm\frac{1.2\ldots n-1}{x^n}$$

dan komt er, volgens de reeks (12)

$$l(x+h) = l(x) + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{2.3}\frac{h^3}{x^3} - \text{enz.}$$

De rest $\quad \frac{h^n}{1.2..n} F_n(x+ih) = \pm \frac{1}{n} \cdot \frac{h^n}{(x+ih)^n}$,

toont terstond aan, dat deze uitdrukking voor $h = x$ en $h < x$, tot nul nadert, en de reeks dus in elk dezer beide gevallen zal convergeren tot $l(x+h)$.

Voor negatieve waarden van h, zal het onderzoek ook hier gemakkelijker kunnen geschieden door middel der rest

$$\frac{(1-i)^{n-1}h^n}{1.2..n-1} F_n(x+ih) = \pm \frac{(1-i)^{n-1}h^n}{(x+ih)^n},$$

welke, na verandering van h in $-h$, op het teeken na, aldus kan voorgesteld worden:

$$\left(\frac{h-ih}{x-ih}\right)^{n-1} \cdot \frac{h}{x-ih},$$

en blijkbaar voor $h < x$, nul tot limiet heeft. Voor $h = x$ is deze limiet $\frac{1}{1-i}$.

De reeks is dus eeniglijk geldig voor $h = x$, en voor alle waarden van h, gelegen tusschen $-x$ en $+x$.

Vervangt men $l(x+h)$ door $l(1+\frac{h}{x}) + l(x)$, dan gaat de reeks, na $\frac{h}{x} = z$ gesteld te hebben, over in deze

$$l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \text{enz.},$$

welke nu alleen voor $z = 1$, en voor alle overige waarden van z, gelegen tusschen -1 en $+1$, convergent zal zijn, hetgeen met het hiervoren gevondene overeenstemt.

§ 56. Nemen wij thans tot voorbeeld $F(x) = \sin. x$, gevende $F_1(x) = \cos. x$, $F_2(x) = -\sin. x$, en in het algemeen (§ 31),

$$F_n(x) = \sin. (x + \frac{n\pi}{2}),$$

dus $\quad F(0) = 0. \quad F_1(0) = 1. \quad F_2(0) = 0$, enz.

en $\quad \sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} - \text{enz.}$

De rest $\quad \frac{x^n}{1.2..n} \sin. (ix + \frac{n\pi}{2})$

zal, omdat de tweede factor altijd < 1 is, nul tot limiet hebben, zoodat de reeks voor alle waarden van x bruikbaar is.

Men vindt op gelijke wijze

$$cos.\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{enz.}$$

moetende in elke dezer en andere soortgelijke reeksen, waardoor eene goniometrische lijn in functie van den boog ontwikkeld wordt, x steeds in deelen van den straal uitgedrukt zijn.

Indien men uit $F(x) = sin.\, x$, en $F(x) = cos.\, x$ de waarden van $sin.(x+h)$ en $cos.(x+h)$, met behulp der reeks van TAYLOR wil afleiden, zal men daarvoor bekomen de reeksen

$$sin.\,(x+h) = sin.\, x + h\, cos.\, x - \frac{h^2}{1.2} sin.\, x + \frac{h^3}{1.2.3} cos.\, x - \text{enz.}$$

$$cos.\,(x+h) = cos.\, x - h\, sin.\, x - \frac{h^2}{1.2} cos.\, x + \frac{h^3}{1.2.3} sin.\, x + \text{enz.}$$

waarvan de resten

$$\frac{h^n}{1.2...n} sin.\,(x + ih + \frac{n\pi}{2}), \qquad \frac{h^n}{1.2...n} cos.\,(x + ih + \frac{n\pi}{2}),$$

terstond de convergentie van elke dezer reeksen voor alle waarden van x en h aantoonen; hetgeen ook behalve dien kan blijken, indien men dezelve onder deze vormen voorstelt:

$$sin.\,(x+h) = sin.\, x\,(1 - \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{enz.})$$

$$+ cos.\, x\,(h - \frac{h^3}{2.3} + \frac{h^5}{1.2..5} - \text{enz.})$$

$$cos.\,(x+h) = cos.\, x\,(1 - \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{enz.})$$

$$- sin.\, x\,(h - \frac{h^3}{2.3} + \frac{h^5}{1.2..5} - \text{enz.})$$

waarin de reeksen tusschen de haakjes, volgens het hiervoren reeds gevondene, de waarden van $cos.\, h$ en $sin.\, h$ aanwijzen, en hieruit laten zich tevens afleiden de twee goniometrische grondformules,

$$sin.\,(x+h) = sin.\, x\, cos.\, h + cos.\, x\, sin.\, h.$$
$$cos.\,(x+h) = cos.\, x\, cos.\, h - sin.\, x\, sin.\, h.$$

§ 57. Voor vele functiën kan de toepassing der reeks van MACLAURIN soms tot omslagtige bewerkingen aanleiding geven, wanneer na-

melijk de algemeene wet tot bepaling der achtervolgende differentiaal quotienten moeijelijk op te sporen is. Zulks heeft onder anderen plaats met de functie $F(x) = B\,tg.\,x$.

Men kan echter hierin op de navolgende wijze voorzien. Zij

$$B\,tg.\,x = \varphi, \text{ of } x = tg.\,\varphi,$$

dan is
$$d\varphi = \frac{dx}{1+x^2} = cos.^2\varphi.dx$$

dus
$$F_1(x) = cos.^2\varphi.$$

$$F_2(x) = -2\,cos.\,\varphi\,sin.\,\varphi\frac{d\varphi}{dx} = -2\,cos.^3\varphi\,sin.\,\varphi,$$

of
$$F_2(x) = -sin.\,2\varphi\,cos.^2\varphi.$$

$$F_3(x) = -2(cos.\,2\varphi\,cos.^2\varphi - sin.\,2\varphi\,cos.\,\varphi\,sin.\,\varphi)\frac{d\varphi}{dx}$$

of
$$F_3(x) = -2\,cos.\,3\,\varphi\,cos.^3\,\varphi.$$

Op gelijke wijze vindt men

$$F_4(x) = +2.3\,sin.4\,\varphi\,cos.^4\varphi.$$

$$F_5(x) = -2.3.4\,cos.\,5\,\varphi\,cos.^5\varphi,$$

waarvan de wet van opvolging spoedig in te zien is, zoodat men in het algemeen stellen kan

$$F_n(x) = 1.2.3..(n-1)\,sin.\,n(\varphi + \frac{\pi}{2})\,cos.^n\varphi.$$

Derhalve

$F(0) = 0$, $F_1(0) = 1$, $F_2(0) = 0$, $F_3(0) = -2$, $F_4(0) = 0$, $F_5(0) = +2.3.4$, enz. waaruit dadelijk volgt,

$$B\,tg.\,x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \text{enz.}$$

De rest der reeks is

$$\frac{x^n}{n}\,sin.n(i\varphi + \frac{\pi}{2})\,cos^n i\varphi$$

welke, uithoofde het product der beide laatste factoren steeds tusschen -1 en $+1$ begrepen is, te kennen geeft dat de reeks convergent is, zoowel voor $x = \pm 1$, als voor alle waarden van x gelegen tusschen -1 en $+1$.

Zij nog $\quad F(x) = (1+x)^m, \quad F(0) = 1,$

dus $\quad F_1(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad F_1(0) = m.$

$$F_2(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}. \quad F_2(0) = m(m-1).$$
$$F_n(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

Gevolgelijk

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \text{enz.}$$

welke reeks tot rest heeft

$$\frac{m(m-1)..(m-n+1)}{1.2..n} x^n.(1+ix)^{m-n}.$$

De eerste der drie factoren waarin dat product ontbonden kan worden, zal voor toenemende waarden van n, mits m positief onderstellende, blijkbaar tot nul naderen, en hieruit laat zich terstond opmaken, dat de reeks alsdan convergent is zoo voor $x = 1$ als voor alle positieve waarden van $x < 1$.

Indien men daarentegen x negatief neemt, zal uit de breuk $\left(\frac{x}{1-ix}\right)^n$ de waarde van hare limiet met geene zekerheid kunnen opgemaakt worden. Gebruikt men echter den tweeden vorm der rest, namelijk

$$\frac{m(m-1)..(m-n+1)}{1.2..n-1}(1-i)^{n-1}x^n(1+ix)^{m-n}$$
$$= \frac{m(m-1)..(m-n+1)}{1.2..n-1}x^n.\left(\frac{1-i}{1+ix}\right)^{n-1}(1+ix)^{m-1}.$$

dan zal men ligtelijk inzien, dat het voorgaande product, na verandering van x in $-x$, insgelijks tot nul nadert, bijaldien men $x = 1$ en $x < 1$ neemt, m hierbij positief zijnde, waaruit wij alzoo mogen besluiten, dat de reeks convergent zal zijn voor $x = \pm 1$, zoo mede voor alle waarden van x, gelegen tusschen -1 en $+1$. Voor negatieve waarden van m zullen echter eeniglijk de beide laatste grenzen gelden, vermits de reeks alsdan divergent wordt voor $x = \pm 1$.

Men zal op gelijke wijze met behulp der reeks van Taylor bevinden, dat de oneindige reeks

$$(x+h)^n = x^n + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \ldots.$$

convergent is voor alle waarden van x gelegen tusschen $-h$ en $+h$, en daarenboven voor $x = \pm h$, bijaldien m positief is.

§ 58. Ingeval de bepaling der limiet van de rest der reeksen van Maclaurin en Taylor met eenige moeijelijkheid gepaard gaat, kan de beoordeeling aangaande de convergentie dikwerf spoediger geschieden, door middel van een der bestaande kenmerken voor de reeksen in het algemeen.

Wij weten namelijk dat, indien y_n de algemeene term eener reeks, en k de limiet der verhouding $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ of van $\sqrt[n]{y_n}$ voorstelt, de reeks al dan niet convergent zal zijn, naardat de getallenwaarde van $k <$ of > 1 is (*).

Nu is de algemeene term van elke der voormelde reeksen

$$\frac{x^n F_n(0)}{1.2.3..n}, \qquad \frac{h^n F_n(x)}{1.2.3..n},$$

Men heeft alzoo voor de reeks van MACLAURIN,

$$k = \lim. \frac{x}{n+1} \frac{F_{n+1}(0)}{F_n(0)} = \lim. x \sqrt[n]{\frac{F_n(0)}{1.2..n}}.$$

en voor die van TAYLOR,

$$k = \lim. \frac{h}{n+1} \frac{F_{n+1}(x)}{F_n(x)} = \lim. h \sqrt[n]{\frac{F_n(x)}{1.2..n}}.$$

De eerste reeks is dus convergent voor alle waarden van $x < \lim. \frac{(n+1)F_n(0)}{F_{(n+1)}(0)}$ of $< \lim. \sqrt[n]{\frac{1.2..n}{F_n(0)}}$, en de tweede voor alle waarden van $h < \lim. \frac{(n+1)F_n(x)}{F_{n+1}(x)}$ of $< \lim. \sqrt[n]{\frac{1.2..n}{F_n(x)}}$.

In het geval van $F(x) = (1+x)^m$ bijv. is

$$\frac{F_{n+1}(0)}{F_n(0)} = m - n. \qquad \lim. \frac{n+1}{m-n} = -1.$$

De reeks is alzoo convergent voor alle positieve of negatieve getallen waarden van $x < 1$.

(*) De gelijkheid van beide limieten is in ons werk over de *Hoogere Algebra* (22e *Les*) betoogd. Zie hier echter nog een ander bewijs op de differentiaal-rekening gegrond.

Uit de algemeene vergelijking

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F_1(x+ih),$$

zal men, in verband tot de in de vijfde les verklaarde theorie, ligtelijk kunnen opmaken, dat de verhoudingen

$$\frac{F(x)}{x} \quad \text{en} \quad \frac{F(x+h)-F(x)}{h},$$

voor toenemende waarden van x, h hierbij eene eindige waarde behoudende, beide tot dezelfde limiet $F_1(\infty)$ naderen. Hetzelfde geldt dus ook van de breuken

$$\frac{lF(x)}{x} \quad \text{of} \quad lF(x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{en} \quad \frac{1}{h}\, l\left(\frac{F(x+h)}{F(x)}\right).$$

Stellende nu $h = 1$, dan volgt hieruit terstond dat $F(x)^{\frac{1}{x}}$ en $\frac{F(x+1)}{F(x)}$ dezelfde limiet-waarde bekomen voor $x = \infty$.

Voor $F(x) = l(1+x)$, heeft men

$$\frac{F_{n+1}(0)}{F_n(0)} = \pm n. \qquad \lim. \frac{n+1}{n} = 1.$$

De reeks geldt dus voor alle waarden van $\pm x < 1$. Ook volgt uit

$$F_n(0) = 1.2..n-1. \qquad \lim. \sqrt[n]{\frac{1.2..n}{F_n(0)}} = \sqrt[n]{n} = 1 \ (\S\ 48),$$

hetgeen dezelfde uitkomst oplevert.

§ 59. Voor zoodanige functiën, die voor $x = 0$, oneindig worden, zal de reeks van Maclaurin blijkbaar geene toepassing kunnen vinden, dewijl al de afgeleide functiën alsdan insgelijks oneindige waarden verkrijgen. De functie is hierdoor niet vatbaar om volgens de geheele positieve magten van x ontwikkeld te worden. Zulks is, onder anderen, het geval met de functiën $l(x)$, $cot. x$, $l(sin. x)$, $l(tg. x)$. In sommige gevallen kan ook de reeks van Taylor, voor bijzondere waarden van x, hare bruikbaarheid verliezen; hetgeen onder anderen dan plaats heeft, bij aldien $F(x)$ of eenige van hare afgeleide functiën, voor zoodanige waarde van x, oneindig worden, en dus ophouden de ondersteld continuiteit te bezitten.

Tot voorbeeld strekke eene functie van x, tot den vorm $\frac{f(x)}{(x-a)^m}$ behoorende, waarin $f(x)$ ondersteld wordt, voor $x = a$, niet te verdwijnen, noch eene oneindige waarde te bekomen; m tevens een positief getal zijnde.

Nu laat zich wel de functie

$$F(x+h) = \frac{f(x+h)}{(x+h-a)^m},$$

met behulp der reeks van Taylor, naar de geheele en opklimmende magten van h ontwikkelen; doch, daar $F_n(x)$ eene breuk wordt, tot noemer hebbende $(x-a)^{m+n}$, zullen al de afgeleide functien even als $F(x)$ zelve, voor $x = a$ oneindig groot worden, waardoor dus de ontwikkeling volgens geheele en positieve magten van h, voor die bijzondere waarde van x onmogelijk wordt, hetgeen ook hierdoor bevestigd wordt, dat $F(x+h)$ alsdan overgaat in $\frac{f(x+h)}{h^m}$, en dus met eene negatieve magt van h aangedaan is.

Met de functie $log(x+h)$ heeft hetzelfde plaats voor $x = 0$. Zij gaat alsdan in $log(h)$ over, en kan niet meer volgens de positieve geheele magten van h ontwikkeld worden. Voor $x = 0$, verkrijgen $log(x)$ en zijne afgeleide functiën ook oneindig groote waarden.

Men zoude nog eene tweede omstandigheid kunnen aanvoeren, waarin de toepassing der bedoelde reeks faalt. Indien namelijk de voorgestelde functie wortel-grootheden bevat van den vorm $\sqrt[q]{(x-a)^p}$ die voor $x = a$ verdwijnen, zullen deze ten gevolge moeten hebben, dat er afgeleide functien oneindig groot worden, waardoor er geene ontwikkeling volgens de geheele en positieve magten van h mogelijk wordt. Zij bijv.

$$F(x) = f(x) + \sqrt{(x^2 - a^2)} + \sqrt[3]{(x-a)^4},$$

waarin $f(x)$ eene eindige waarde behoudt voor $x = a$.

Men ziet dat de functiën

$$F_1(x) = f_1(x) + \frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{(x-a)},$$

$$F_2(x) = f_2(x) + \frac{1}{(\sqrt{x^2 - a^2})} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} + \frac{4}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-a)^2}},$$

enz. enz.

allen, voor $x = a$, oneindig groot worden. $F(a+h)$ gaat echter over in

$$f(a+h) + \sqrt{h(2a+h)} + \sqrt[3]{h^4},$$

en bevat ook werkelijk in hare ontwikkeling gebrokene magten van h.

De onbruikbaarheid der reeks van Taylor laat zich in zoodanig geval ook aldus verklaren. Elke wortelgrootheid $\sqrt[q]{(x-a)^p}$, heeft zoo vele verschillende waarden als het geheele getal q eenheden telt. Zulks heeft eveneens plaats bij al hare afgeleide functiën, zoodat de gemelde reeks ook werkelijk, bij verandering van x in $x+h$ het vereischte aantal waarden oplevert. Stelt men echter $x = a$, dan komen er geene wortelgrootheden meer voor in de afgeleide functiën, terwijl $F(x+h)$ hare q verschillende waarden behoudt.

Anders echter is het gesteld met zoodanige functiën waarin de wortelgrootheden alleen wegvallen, door dien de factoren waarmede zij aangedaan zijn, voor eene bijzondere waarde van x verdwijnen. Men neme bijv.

$$F(x) = (x-a)^m \sqrt[q]{(x-b)^q},$$

m een geheel positief getal zijnde, dan zal men, met behulp der in § 31 gegevene algemeene formule voor het n^e differentiaal quotient van een product van twee functiën eener veranderlijke grootheid x, ligtelijk inzien, dat de $m-1$ achtervolgende afgeleide functiën van

$F(x)$, even als deze, voor $x = a$ verdwijnen, terwijl er wortelgrootheden in al de volgende afgeleide functiën zullen overblijven. De reeks voor $F(x+h)$ zal dan ook eerst met den term $\frac{F_n(x)}{1.2..n} h^m$ aanvangen, en alzoo geene lagere magten van h beneden de m^e kunnen bevatten. Werkelijk heeft men ook, voor $x = a$,

$$F(x+h) = h^m \sqrt[p]{(a-b+h)^q}.$$

De reeks van Taylor kan dus hier toegepast worden, en zal ook het vereischte aantal waarden voor $F(x+h)$ opleveren.

Men oefene zich thans in de ontwikkeling der functiën

$$F(x) = e^{ax} \sin. nx, \qquad f(x) = e^{ax} \cos. nx,$$

waarvoor men zal vinden

$$F(x) = \alpha \sin. \varphi . x + \alpha^2 \sin. 2\varphi . \frac{x^2}{1.2} + \alpha^3 \sin. 3\varphi . \frac{x^3}{1.2.3} + ..$$

$$f(x) = 1 + \alpha \cos. \varphi . x + \alpha^2 \cos. 2\varphi . \frac{x^2}{1.2} + \alpha^3 \cos. 3\varphi . \frac{x^3}{1.2.3} + ..$$

zijnde hierin $\alpha = \sqrt{(a^2+n^2)}$ en $\varphi = Btg. \frac{n}{a}$.

§ 60. Voor sommige functiën levert het gebruik der reeks van Maclaurin niet altijd het spoedigste middel op, om die naar de opklimmende magten van x te ontwikkelen. Men kan dikwerf gemakkelijker hiertoe geraken door het gebruik der afgeleide functiën met de leerwijze der onbepaalde coëfficiënten te verbinden. Een paar voorbeelden zullen voldoende zijn, om den geest dezer handelwijze te doen kennen.

Zij $F(x) = B. \sin. x$. Men onderstelle deze functie vatbaar voor ontwikkeling volgens eene convergerende reeks van den vorm

$$F(x) = B. \sin. x = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \text{enz},$$

waarin geen standvastige term kan voorkomen, vermits $F(0) = 0$.

Daar de beide leden dezer vergelijking voor alle waarden van x identiek zijn, zal zulks met hunne afgeleide functiën insgelijks het geval moeten wezen. Differentierende alzoo, komt er

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + 5A_5 x^4 + \text{enz}.$$

Zoo men men nu $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ op de bekende wijze ontwikkelt in de reeks

$$1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \text{enz}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

welke voor alle waarden van $x < 1$ convergent is, vindt men terstond door de gelijkstelling der coëfficiënten behoorende tot dezelfde magten in de twee voorgaande reeksen,

$$A_1 = 1,\ A_2 = 0,\ A_3 = \frac{1}{2.3},\ A_4 = 0,\ A_5 = \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5}.\ A_6 = 0 \text{ enz.}$$

Derhalve

$$B \sin. x = x + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}x^3 + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{7}x^7 + \text{enz.}$$

Daar de functie $l(x + \sqrt{(1 + x^2)})$ tot afgeleide functie heeft $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$, zal men, na in de reeks (a), x^2 door $-x^2$ vervangen te hebben, voor de ontwikkeling der gegevene functie, met behulp der onbepaalde coëfficiënten, terstond bekomen,

$$l(x - \sqrt{(1 + x^2)}) = x - \frac{1}{2}.\frac{1}{3}x^3 + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5}x^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{7}x^7 + \text{enz.}$$

welke eeniglijk voor $x < 1$ convergent zal zijn.

Zij nog

$$F(x) = (a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{enz})^n.$$

Men stelle

$$F(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \text{enz.}$$

en neme aan beide zijden de logarithmen, dan komt er, na differentiatie

$$\frac{n(b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \text{enz.})}{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{enz.}} = \frac{A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \text{enz.}}{A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \text{enz.}}$$

Deze vergelijking herleidende, en de coëfficiënten der gelijknamige magten van x aan elkander gelijkstellende, zal men hieruit voor alle waarden van n, de coëfficiënten A_0. A_1. A_2.. in functie van a, b, c... kunnen uitdrukken; zijnde hierin A_0 blijkbaar $= a^n$.

Men kan tot verdere oefening kiezen de ontwikkelingen van de functiën

$$F(x) = log.(1 + ax + bx^2 + cx^3)$$

$$F(x) = e^{ax + bx^2 + cx^3}.$$

ACHTSTE LES.

Onderzoek der maxima en minima bij functiën van eene enkele veranderlijke grootheid.

§ 61. Indien het veranderlijke element x eener functie y alle mogelijke positieve of negatieve waarden, hetzij al dan niet tusschen twee bepaalde grenzen begrepen, kan verkrijgen, zullen de daarmede overeenstemmende waarden van y, voor sommige functiën te gelijk met x aanhoudend toe- of afnemen, voor anderen daartegen bij afwisseling aangroeijen en verminderen, om vervolgens wederom onbepaald toe- of af te nemen. Deze twee verschillende gevallen laten zich met behulp van kromme lijnen, welker vergelijkingen door die functiën aangewezen worden, op eene aanschouwelijke wijze voor oogen stellen. De figuren 5, 6, 7 vertoonen ons kromme lijnen, die zich hetzij in eene enkele, hetzij in twee tegengestelde rigtingen onbepaald uitstrekken, en waarin de ordinaten te gelijk met de abscissen aanhoudend aangroeijen of afnemen, zoodat zij de as der abscissen slechts in een eenig punt snijden, of deze as tot assymptoot hebben. In de *fig.* 8 en 9 zien wij integendeel kromme lijnen van een' kronkelenden vorm, waarin de ordinaten, na tot over eene zekere uitgestrektheid aanhoudend in grootte toegenomen of afgenomen te zijn, vervolgens gaan af- of toenemen, en zulks eenige malen herhalen, alvorens wederom bestendig te blijven aangroeijen of afnemen, voor zoo verre namelijk die ordinaten niet binnen bepaalde grenzen besloten zijn.

§ 62. De functie y of $F(x)$ nu wordt gezegd voor eenige waarde van x een *maximum* of *minimum* te worden, wanneer de daarmede overeenstemmende waarde van *y grooter* of *kleiner* is, dan elk der onmiddelijk voorafgaande en volgende waarden van y, hoe nabij deze ook tot elkander genomen worden. Het analytische kenmerk van een maximum of minimum eener functie y, voor eenige waarde van x, is derhalve hierin gelegen, dat in het eerste geval

$$F(x) \text{ zoowel } > F(x-h) \text{ als } > F(x+h), \text{ en}$$

in het tweede geval

$$F(x) \text{ zoowel } < F(x-h) \text{ als } < F(x+h) \text{ is}$$

hoe klein het verschil h ook genomen worde. In *fig.* 8 en 9 zijn M, M_1, M_2... de punten der kromme, alwaar de ordinaten een maximum of minimum bereiken, of gelijk men zegt, hare grootste of kleinste waarden verkrijgen, waaronder echter niet verstaan mag worden, dat een maximum of minimum in een volstrekten zin aanwijst de grootste of kleinste waarde van y of van de ordinaten der kromme, vermits deze in haren verderen loop, zoo zij niet binnen bepaalde grenzen beperkt is, het tegendeel kan vertoonen. Ook kan de aard der functie y, of de gedaante der kromme, soms zoodanig zijn, dat de waarde van eenig minimum, die van eenig maximum in grootte overtreft, hetgeen insgelijks door middel eener figuur gemakkelijk toe te lichten is.

De kromme van *fig.* 9 welke de as der abscissen eenige malen snijdt, bevat zoowel positieve als negatieve ordinaten, waaronder die der punten M_1, M_3, negatieve maxima vertoonen, welke echter met betrekking tot de positieve ordinaten, als minima te beschouwen zijn.

§ 63. Naar aanleiding der voorgaande verklaring van het begrip der maxima en minima, zullen wij het hiervoren aangegeven analytische kenmerk, thans meer van nabij beschouwen, ten einde daaruit de regels af te leiden tot onderzoek van het al of niet bestaan van maxima en minima voor eene gegevene functie.

Volgens § 7, kan geene functie y, tusschen x en $x+h$, aanhoudend aangroeijen of afnemen, ten zij het differentiaal quotient $\frac{dy}{dx}$, tusschen die grenzen positief of negatief blijve. Wordt nu $y=F(x)$ een maximum voor eenige waarde $x=a$, dan zal $F_1(x)$ van $x=a-h$, tot $x=a$, positief, daarentegen van $x=a$ tot $x=a+h$ negatief wezen, hoe klein h ook genomen zij, terwijl voor het minimum van $F(x)$, het tegenovergestelde zal plaats vinden. In beide gevallen zal dus $F_1(x)$ voor $x=a$, van den positieven tot den negatieven toestand moeten overgaan, of omgekeerd; waaruit onmiddelijk volgt dat, indien $x=a$, de functie y tot een maximum of minimum maakt, $F_1(x)$, voor deze bijzondere waarde van x, noodzakelijk nul of oneindig zal worden.

Zulks laat zich door eene meetkunstige beschouwing der zaak bevestigen. Het blijkt namelijk uit de figuren 8 en 9, dat de raaklijnen in de punten M, M_1, M_2, allen evenwijdig aan de as der abscissen gerigt zijn, en dus $F_1(x)$ of $\frac{dy}{dx}$ in elk dezer punten nul is. In de krommen van *fig.* 10 en 11 daarentegen, worden de ordinaten in de

keerpunten R een maximum en een minimum. Deze ordinaten zijn aldaar tevens raaklijnen in die punten, waardoor $F_1(x)$ oneindig groot wordt.

Bij het bepalen der maxima of minima van eenige functie $F(x)$, zal men alzoo in de eerste plaats te stellen hebben, de vergelijking

$$F_1(x) = 0 \text{ of } \infty.$$

De waarden van x aan deze vergelijking voldoende, zullen diegene zijn, welke de gegevene functie tot een maximum of minimum kunnen maken. Mogt daaruit voor x geene bestaanbare waarde af te leiden zijn, dan is de functie ook voor geen maximum noch minimum vatbaar.

Wij mogen echter niet bij omkeering hieruit besluiten, dat indien voor eenige waarde van x, $F_1(x)$ nul of oneindig wordt, zulks daarom het bestaan van een maximum of minimum aanduidt. Immers kan dat geval, zoo als bekend is, plaats vinden, ofschoon $F_1(x)$ voor $x - h$ en $x + h$ hetzelfde teeken behoude. De vorm der in *fig.* 12 en 13 aangewezen krommen, is geschikt om deze omstandigheid duidelijk voor oogen te stellen. Elke dezer krommen vertoont namelijk in M een buigpunt, alwaar de raaklijn eene rigting heeft, evenwijdig aan of loodregt op de as der abscissen. Voor elk der punten M, voldoet de abscis aan eene der vergelijkingen $F_1(x) = 0$, $F_1(x) = \infty$, terwijl de ordinaten voorbij die punten blijven aangroeijen, zoodat hier geen maximum noch minimum plaats vindt.

Bij een keerpunt kan, blijkens *fig.* 14, de raaklijn insgelijks evenwijdig aan de as der abscissen loopen, en dus $F_1(x)$ voor $x = a$ nul worden, hoewel de ordinaat in dat punt, noch als maximum van den benedensten tak, noch als minimum voor den bovensten tak te beschouwen zij, vermits de waarde van y voor $x > a$ onbestaanbaar wordt. Zoodra dus $x = a$ een grens voor de bestaanbaarheid van y oplevert, kan de functie, voor zoodanige waarde van x, geen maximum noch minimum opleveren.

§ 64. De voorgaande opmerkingen wijzen de noodzakelijkheid van een tweede kenmerk aan, waaruit zich met zekerheid laat opmaken, of de oplossing der verg. $F_1(x) = 0$ of ∞, voor x waarden oplevert, die werkelijk $F(x)$ tot een maximum of minimum maken, en zoo ja, welke dezer beide omstandigheden hierbij alsdan plaats zal vinden.

Zonder tot de bepaling der waarden van $F(x-h)$ en $F(x+h)$ toevlugt te nemen, ten einde hieruit te beoordeelen of deze gelijktijdig die van $F(x)$, al dan niet overtreffen, hoe klein h ook genomen zij, is men in staat het verlangde kenmerk vrij spoedig af te leiden uit de reeks van TAYLOR onder een' eindigen vorm gebragt. Wij hebben namelijk, die reeks bij de drie eerste termen bepalende,

$$F(x+h) = F(x) + hF_1(x) + \frac{h^2}{1.2}F_2(x+ih) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Zal nu $x = a$, $F(x)$ tot een maximum of minimum maken, dan moet § (63) $F_1(x) = 0$ of ∞ zijn. Wij zullen hier het eerste dezer twee gevallen, hetwelk verre weg het meeste voorkomt, aannemen. De verg. (1) zou ook anders geene toepassing kunnen vinden, vermits al de afgeleide functiën oneindig zouden worden.

Uit die vergelijking volgt thans,

$$F(x+h) - F(x) = \frac{h^2}{1.2}F_2(x+ih),$$

$$F(x-h) - F(x) = \frac{h^2}{1.2}F_2(x-ih).$$

Voor oneindig kleine waarden van h, verkrijgen $F_2(x+ih)$, $F_2(x+ih)$ blijkbaar hetzelfde teeken als $F_2(x)$. Laat nu $x = a$, $F(x)$ tot een maximum maken, dan zullen de beide verschillen $F(a+h) - F(a)$, $F(a-h) - F(a)$, elk met het negatieve teeken aangedaan zijn; derhalve zal zulks met $F_2(x)$ voor $x = a$, insgelijks het geval moeten zijn. Even zoo blijkt dat $F_2(x)$, ingeval van een minimum, te gelijk met elk der beide verschillen, het positieve teeken verkrijgt. Hieruit besluiten wij derhalve tot de navolgende eigenschap:

Indien x = a, *eene der waarden is*, *welke aan de vergel.* $F_1(x) = 0$ *voldoen*, *zal* F(x), *voor deze waarde van* x, *een maximum of minimum worden*, *naar dat* $F_2(a)$ *met het* negatieve *of* positieve *teeken aangedaan is.*

Zij bijv. $\qquad F(x) = x^2 - mx + n,$

dan is $\qquad F_1(x) = 2x - m$ en $F_2(x) = 2.$

Daar nu $x = \frac{m}{2}$, $F_1(x) = 0$ maakt, en $F_2(x)$ steeds positief is, blijkt hieruit, dat de gegevene functie voor $x = \frac{m}{2}$, een minimum wordt, tot waarde hebbende $n - \frac{1}{4}m^2$, welke, omdat $F(x)$ hier

voor geen maximum vatbaar is, ook de kleinste waarde voorstelt waartoe die functie dalen kan.

§ 65. Het kan echter gebeuren dat $F_2(x)$ te gelijk met $F_1(x)$, voor $x = a$, nul wordt, als wanneer er onzekerheid schijnt overig te blijven, omtrent het al af niet bestaan van eenig maximum of minimum. In dat geval zal het kenmerk af te leiden zijn, uit de vergelijking

$$F(x+h) = F(x) + hF_1(x) + \frac{h^2}{2}F_2(x) + \frac{h^3}{2.3}F_3(x+ih),$$

welke, in de aangenomen onderstelling, geeft

$$F(a+h) - F(a) = +\frac{h^3}{2.3}F_3(a+ih),$$

$$F(a-h) - F(a) = -\frac{h^3}{2.3}F_3(a-ih)$$

Voor oneindig kleine waarden van h, zullen $F_3(a+ih)$, $F_3(a-ih)$, wederom hetzelfde teeken hebben als $F_3(a)$, zoodat de verschillen $F(a \pm h) - F(a)$, welk ook het teeken van $F_3(a)$ zij, steeds met tegenovergestelde teekens zullen aangedaan zijn. Geen maximum noch minimum kan alsdan plaats hebben, zoodra $F_3(a)$ eene eindige of bepaalde waarde verkrijgt.

De voorwaarde $F_3(a) = 0$ is dus hier noodzakelijk, doch voor het bestaan van een maximum of minimum evenmin voldoende als de enkele voorwaarde $F_1(a) = 0$. Zulks kan blijken uit de verlijking

$$F(x+h) = F(x) + hF_1(x) + \ldots + \frac{h^4}{2.3.4}F_4(x+ih)$$

welke, voor $x = a$, thans geeft

$$F(a \pm h) - F(a) = \frac{h^4}{2.3.4}F_4(a \pm ih)$$

en waaruit wederom door eene zelfde redenering als hiervoren, het besluit getrokken wordt, dat het bestaan van een maximum of minimum tevens vordert, dat $F_4(a)$ eene eindige negatieve of positieve waarde bekome.

Is echter $F(x)$ van dien aard, dat ook $F_4(x)$ te gelijk met $F_1(x)$, $F_2(x)$ en $F_3(x)$, voor $x = a$, verdwijnt, dan zal men, door het voortzetten derzelfde redenering, spoedig inzien dat ook de voorwaarden

$F_5(a) = 0$, en $F_6(a)$ negatief of positief, tot het bestaan van een maximum of minimum vereischt worden; en hieruit mogen wij thans dezen algemeenen regel afleiden, tot het onderzoeken of eenige gegevene functie $F(x)$ maxima of minima toelaat.

Men zoeke de bijzondere waarden van x, *welke aan de vergelijking* $F_1(x) = 0$ *voldoen, en substituere die achtervolgens in eenige der afgeleide functiën* $F_2(x).F_3(x)...F_n(x)$, *tot zoo lang eene dezer functiën hierdoor eene eindige positieve of negatieve waarde verkrijgt, dan zal de gegevene functie een* maximum *of* minimum *worden, ingeval het aantal, voor dezelfde bijzondere waarde van* x, *verdwijnende functiën* oneven *is, en de eerste hierop volgende afgeleide functie* negatief *of* positief *wordt.*

Deze regel onderstelt stilzwijgend dat geen der wortels van de vergelijking $F_1(x) = 0$, die aan het voorgaande kenmerk voldoen, tevens een grens voor de bestaanbaarheid der gegevene functie zij, als wanneer er geen maximum noch minimum mogelijk wordt.

Bij aldien $F_1(x)$ of eene der volgende afgeleide functiën voor de bijzondere waarde $x = a$, oneindig wordt, zal de voorgaande regel ophouden van toepassing te zijn, en er blijft in zoodanig geval geen ander middel overig ter beslissing van het aanwezen van een maximum of minimum, dan te onderzoeken of de waarden van $F(a \pm h)$, hoe klein h ook genomen worde, beiden te gelijk kleiner of grooter dan $F(a)$ zijn.

In het algemeen zij hier nog opgemerkt, dat het al of niet aanwezig zijn van eenig maximum of minimum, ook in vele gevallen, zonder tot achtervolgende differentiatiën over te gaan, gemakkelijk te beoordeelen is, door slechts na te gaan, of $F_1(x)$ voor $x < a$ en $x > a$ eene teekenverandering ondergaat; zullende $F(x)$ alsdan eene maximum of minimum-waarde verkrijgen, naardat die overgang van $F_1(x)$ geschied is van het positieve naar het negatieve, of omgekeerd. De reden hiervan is onmiddelijk uit het geleerde in § 7 af te leiden. Immers zal $F(x)$ van $x = a - h$ tot $x = a$ toenemen of afnemen, naardat $F_1(x)$ tusschen die grenzen positief of negatief blijft; en even zoo zal $F(x)$ van $x = a$ tot $x = a + h$ afnemen of toenemen, naar dat $F_1(x)$ tusschen die grenzen negatief of positief blijft.

§ 66. Zie hier thans eenige toepassingen tot opheldering der hiervoren verklaarde theorie.

1°. Zij $$F(x) = \frac{a^x}{x},$$

dus $$F_1(x) = \frac{a^x}{x}\left\{l(a) - \frac{1}{x}\right\},$$

en $$F_2(x) = \frac{a^x}{x}\left\{\frac{1}{x^2} + \left(l(a) - \frac{1}{x}\right)^2\right\}.$$

Voor $x = \frac{1}{l(a)}$ wordt $F_1(x) = 0$, en deze waarde doet $F_2(x)$ overgaan in $\frac{a^x}{x^3}$, zijnde een positief getal; waaruit blijkt, dat $F(x)$ voor $x = \frac{1}{l(a)}$ een minimum wordt. Hetzelfde besluit zou men ook, ingevolge de opmerking ten slotte van § 65 voorkomende, terstond hieruit hebben kunnen opmaken, dat $F_1(x)$ voor $x < \frac{1}{l(a)}$ negatief, en voor $x > \frac{1}{l(a)}$ positief wordt.

2°. Zij $$F(x) = x\,log.x = log.(x^x).$$

De vergelijking $$F_1(x) = M + log.\,x = 0,$$

geeft $$log.x = -M = -log.e = log.\frac{1}{e},$$

dus $$x = \frac{1}{e},$$

en deze waarde substituërende in

$$F_2(x) = \frac{M}{x},$$

zoo geeft het positieve teeken dezer functie te kennen, dat $F(x)$ voor $x = \frac{1}{e}$, eene minimum waarde $-\frac{log.\,e}{e} = -\frac{M}{e}$ bekomt, welke ten aanzien der getallenwaarde als een maximum te beschouwen is. Hieruit volgt tevens, dat de functie x^x een minimum wordt voor

$$x = \frac{1}{e}.$$

3°. Zij $$F(x) = \frac{log.x}{x} = log.(x^{\frac{1}{x}})$$

dus $$F_1(x) = \frac{M}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,log.\,x = \frac{M - log.x}{x^2},$$

$$F_1(x) = 0, \text{ geeft } log.\,x = M = log.\,e, \text{ dus } x = e.$$

Voor $x <$ of $> e$ wordt $F_1(x)$ positief of negatief. Derhalve maakt $x = e$, de functie $\frac{log.\,x}{x}$ tot een maximum $\frac{log.e}{e} = \frac{M}{e}$.

De functie $x^{\frac{1}{x}}$ zal dus eveneens, voor $x = e$, een maximum worden, en tot waarde bekomen $e^{\frac{1}{e}}$.

4°. Zij $$F(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos.x.$$

Stellende $$F_1(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin.x = 0,$$

zoo ziet men gemakkelijk in, dat $x = 0$ aan deze vergelijking voldoet. De waarden van

$$F_2(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos.x,$$

en $$F_3(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin.x,$$

worden elk nul, voor $x = 0$. Daarentegen zal

$$F_4(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos.x,$$

alsdan eene positieve waarde verkrijgen, ten blijke alzoo, dat $x = 0$, de gegevene functie tot een minimum maakt, en deze alsdan 4 tot waarde bekomt.

5°. Zij $$y = F(x) = x^m - ax^n,$$

m en n geheele positieve getallen, en $m > n$ zijnde. Differentiërende de waarde van y, heeft men

$$F_1(x) = mx^{m-1} - nax^{n-1} = 0,$$

of $$F_1(x) = x^{n-1}(mx^{m-n} - na) = 0.$$

Hieraan voldoen $x = \sqrt[m-n]{\frac{na}{m}}$ en $x = 0$.

Aan elke dezer waarden moet thans die van $F_2(x)$ getoetst worden. Na eene tweede differentiatie komt er,

$$F_2(x) = m(m-1)x^{m-2} - n(n-1)ax^{n-2}$$
$$= x^{n-2}\{m(m-1)x^{m-n} - n(n-1)a\}.$$

Hierin de eerste waarde van $x = \sqrt[m-n]{\frac{na}{m}}$ substituerende, vindt men $F_2(x) = na(m-n)x^{n-2}$, welke, in de aangenomen onderstelling van $m > n$, a tevens positief zijnde, een minimum voor $x = \sqrt[m-n]{\frac{na}{m}}$ aanduidt.

Voor $x = 0$ wordt $F_2(x) = 0$, indien $n > 2$ is. Men vindt echter na n achtervolgende differentiatiën,

$$F_n(x) = m(m-1)..(m-n+1)x^{m-n} - 1.2.3..na,$$

zijnde de eerste der afgeleide functiën, welke voor $x = 0$ niet verdwijnt; en aangezien zij hierbij negatief wordt, volgt hieruit, dat de voorgestelde functie, welke in die onderstelling nul wordt, alleen dan eene maximum-waarde verkrijgt, ingeval de exponent n een even getal is.

Deze uitkomst laat zich daarenboven bevestigen door voor x ach-

tervolgens te substitueren h en $-h$, hetgeen y, in het geval van n even, doet overgaan in $h^m - ah^n$ en $(-h)^m - ah^n$, welke waarden, omdat $m > n$ is, en h hier oneindig klein moet ondersteld worden, beide negatief zijn.

Is echter n oneven, dan zullen die beide waarden van y veranderen in $h^m - ah^n$, en $\pm h^m + ah^n$, en derhalve met tegengestelde teekens aangedaan zijn; waaruit blijkt, dat de gegevene functie alsdan voor $x=0$, geen maximum noch minimum kan opleveren.

Men stelle bijv.

$$F(x) = x^6 - 3x^4,$$

dus $\quad m=6,\ n=4$ en $a=3>1$,

$x = \pm\sqrt{2}$ zal dus de functie tot een minimum maken. Voor $x=0$, wordt zij een maximum.

6°. Zij $\quad F(x) = x^m(a-x)^n,$

m en n geheele positieve getallen zijnde.

Stellende

$$\begin{aligned} F_1(x) &= mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1} \\ &= x^{m-1}(a-x)^{n-1}\{ma-(m+n)x\} = 0, \end{aligned}$$

vindt men voor x, de drie waarden

$$x=0,\ x=a \text{ en } x=\frac{ma}{m+n}.$$

Eene tweede differentiatie geeft

$$\begin{aligned} F_2(x) = {} & (a-x)^{n-2}x^{m-2}\{(m-1)a-(m+n-2)x\}\{ma-(m+n)x\} \\ & - (m+n)(a-x)^{n-1}x^{m-1}. \end{aligned}$$

Hierin $x = \frac{ma}{m+n}$ substituerende, verkrijgt men voor $F_2(x)$ blijkbaar eene negatieve waarde, zoodat de gegevene functie een maximum wordt, tot waarde hebbende $\frac{(ma)^m(na)^n}{(m+n)^{m+n}} = m^m n^n \left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n}$.

Uit de algemeene waarde van $F_1(x)$, laat zich nu, met behulp der ten slotte van §31 voorkomende formule, terstond opmaken, dat voor $x=0$, al de afgeleide functiën, tot die der $(m-1)^e$ orde ingesloten, achtervolgens zullen verdwijnen, terwijl de daarop volgende eene positieve waarde bekomt, en dat zulks, met verandering van m in n, insgelijks het geval zal zijn voor $x=a$, waaruit men besluit dat, ingeval m en n beiden even getallen zijn, de gegevene functie, zoowel voor $x=0$ als voor $x=a$, een minimum wordt, en dat, ingeval m even, doch n oneven is, of omgekeerd, de functie alleen voor $x=0$

of $x = a$ een minimum wordt, terwijl er geen minimum kan plaats vinden, indien m en n beiden oneven zijn.

Hetzelfde besluit zou men eveneens uit de teekens, welke de functie $F_1(x)$ vóór en na haren overgang door nul verkrijgt, hebben kunnen afleiden. Immers, daar de factor $ma-(m+n)x$, voor $x < \frac{ma}{m+n}$ en $x > \frac{ma}{m+n}$ beurtelings positief en negatief wordt, volgt hieruit terstond, dat $F(x)$ voor $x = \frac{ma}{m+n}$ een maximum moet worden. Stelt men wijders $x = \mp h$, dan wordt

$$F_1(x) = (\mp h)^{n-1}(a \pm h)^{n-1}\{ma \pm (m+n)h,\}$$

en men zal h klein genoeg kunnen nemen, om het teeken van $F_1(x)$ eeniglijk te doen afhangen van dat des eersten factors $(\mp h)^{n-1}$. Voor elke evene waarde van m, zal dus $F_1(-h)$ negatief en $F_1(h)$ positief worden. Gevolgelijk maakt $x = 0$, $F_1(x)$ tot een minimum. Is echter m oneven, dan ondergaat $F_1(x)$ geene verandering van teeken, en het maximum of minimum wordt onmogelijk.

Stellende eindelijk $x = a \mp h$, zal het op gelijke wijze blijken, dat $F(x)$ een minimum wordt voor $x = a$, indien n even is.

Voor het bijzondere geval van $m = n = 2$, vindt men dat de functie $x(a-x)$ eene maximum-waarde verkrijgt voor $x = \frac{a}{2}$.

In een' meetkunstigen zin overgebragt, leert ons deze laatste uitkomst, dat *onder alle regthoeken die denzelfden omtrek hebben, het vierkant den grootsten inhoud bezit.*

7°. Zij $$F(x) = a + (x-b)^{\frac{p}{q}},$$

p en q geheele positieve getallen, en $p > q$ zijnde.

Door achtervolgende differentiatiën vindt men,

$$F_1(x) = \frac{p}{q}(x-b)^{\frac{p}{q}-1},$$

$$F_2(x) = \frac{p(p-q)}{q^2}(x-b)^{\frac{p}{q}-2},$$

enz. enz.

Daar $F_1(x)$, voor $x = b$, nul wordt, en deze waarde van x al de volgende functiën nul of oneindig maakt, zal de beoordeeling van het al of niet bestaan van eenig maximum of minimum hier met behulp der afgeleide functiën niet kunnen geschieden. Nemen wij dan onze toevlugt tot de waarde van $F_1(x)$, ten einde na te gaan of deze functie voor $x <$ en $> b$ eene teeken verandering ondergaat.

Hierbij behooren thans de navolgende gevallen onderscheiden te worden. Onderstellen wij eerstelijk q oneven, dan kan p even of oneven zijn.

Is p even, en dus $p-q$ oneven, dan gaat $F_1(x)$ voor $x = b+h$ over in

$$\frac{p}{q} \sqrt[q]{(+h)^{p-q}},$$

welke waarde te gelijk met h positief en negatief is. Derhalve zal $F(x)$ voor $x = b$ een minimum opleveren.

Is daarentegen p oneven, en dus $p-q$ even, dan zal $F_1(x)$ voor alle waarden van h het positieve teeken behouden. Alsdan kan de gegevene functie geen maximum noch minimum worden.

Onderstellen wij thans q even, dan zal $F(x)$ voor $x < b$ onbestaanbaar worden, zoodat hier evenmin een maximum of minimum voor $x = b$ kan plaats vinden.

§ 67. Alvorens tot eenige andere voorbeelden over te gaan, zullen wij eenige bekortingen doen kennen, waarvan men zich, bij het onderzoek naar de maxima of minima van vele zamengestelde functiën, met voordeel bedienen kan.

In de eerste plaats zal men gemakkelijk inzien, dat alle uitdrukkingen van een' der vormen

$$a + F(x), \quad a F(x), \quad (F(x))^n$$

n een geheel positief getal aanduidende, maxima of minima zullen worden, zoodra zulks met $F(x)$ het geval is, en het onderzoek zich diensvolgens tot deze laatste functie zal kunnen bepalen; wijders dat het maximum der grootheden

$$a - bF(x), \quad \frac{a}{\varphi(x)}, \quad \frac{af(x)}{F(x)},$$

overeenkomt met het minimum van $F(x)$, $\varphi(x)$ en $\frac{F(x)}{f(x)}$, of omgekeerd.

Bij het ter toetse brengen in $F_2(x)$ der wortels van de vergel. $F_1(x) = 0$, zal men vooreerst de factoren waarin $F_1(x)$ ontbonden kan worden, mogen weglaten, zoodra zij voor alle waarden van x het positieve teeken behouden.

Bestaat $F_1(x)$ uit het product van twee factoren X, X_1, en zijn $x = a$, $x = a_1$ waarden van x, die respectivelijk aan de vergelijkingen $X = 0$, $X_1 = 0$, voldoen, dan zal, omdat

$$F_2(x) = X\frac{dX_1}{dx} + X_1\frac{dX}{dx},$$

$F_2(x)$ voor $x = a$ overgaan in $X_1 \frac{dX}{dx}$, en voor $x = a_1$ in $X \frac{dX_1}{dx}$, zoodat men bij de achtervolgende substitutie dezer waarden van x, slechts beurtelings de factoren X en X_1 als veranderlijk zal behoeven te beschouwen. Dezelfde opmerking geldt, zoo als ligt in te zien is van een willekeurig aantal veranderlijke factoren $X, X_1, . X_n$.

Heeft $F(x)$ den vorm $\frac{X}{X_1}$ en is $x = a$ een der wortels van de verg. $X = 0$, dan zal

$$F_2(x) = \frac{X_1 \frac{dX}{dx} - X \frac{dX_1}{dx}}{X_1^2},$$

voor $x = a$, zich herleiden tot den meer eenvoudigen vorm

$$F_2(x) = \frac{\frac{dX}{dx}}{X_1}.$$

Behoudt nu X_1 het zelfde teeken, dan zal het teeken van $F_2(x)$ overeenkomen met of tegengesteld zijn aan dat van $\frac{dX}{dx}$, naardat X_1 positief of negatief is. Hierdoor zal men de waarde van $x = a$ eeniglijk in het differentiaal quotient van den teller des gebroken $\frac{X'}{X}$ hebben te substitueren, om aangaande het teeken van $F_2(x)$ uitspraak te kunnen doen.

§ 68. Wij zullen hier nog eenige uitgewerkte vraagstukken laten volgen, ten einde de zoo even aangewezen vereenvoudigingen in toepassing te brengen.

1°. *In eenen gegeven cirkel den grootst mogelijken regthoek te beschrijven.*

Stellende den straal des cirkels $= r$, en de onbekende zijde van den ingeschreven regthoek $= 2x$, zal men bevinden dat de inhoud dezer figuur uitgedrukt wordt door $4x\sqrt{(r^2 - x^2)}$.

Men kan dus voor de functie die een maximum moet worden, stellen

$$F(x) = x\sqrt{(r^2 - x^2)},$$

waaruit volgt

$$F_1(x) = \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = 0,$$

dus

$$x = r\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Voor deze waarde van x wordt nu

$$F_2(x) = \frac{-4x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} \text{ negatief;}$$

ten blijke dat hier werkelijk een maximum plaats heeft, en dus het ingeschreven vierkant den grootsten inhoud oplevert.

2°. *Onder alle kegels van gelijke schuinsche zijden, den zoodanigen te bepalen, welks ingeschreven cubus den grootsten inhoud bekome.*

Zij a de lengte der gegevene zijde, x de hoogte en y de straal van het grondvlak des kegels; derhalve

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Brengt men door den ingeschreven cubus een diagonaal vlak, dan zal men bevinden dat de zijde van den cubus tot waarde heeft

$$\frac{2xy}{2y + x\sqrt{2}},$$

welke uitdrukking thans een maximum moet zijn.

De functie
$$\frac{2y + x\sqrt{2}}{2xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y\sqrt{2}},$$

zal derhalve een minimum moeten worden, en hierin voor y zijne waarde $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ substituerende, komt er

$$F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2(a^2 - x^2)}},$$

dus
$$F_1(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

$$= \frac{x^3 - \sqrt{2}.\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}{\sqrt{2}.x^2\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = 0.$$

waaruit
$$x^3 = (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}. = y^3\sqrt{2}.$$

$$x^2 = (a^2 - x^2)\sqrt[3]{2}.$$

$$x = \frac{a\sqrt[6]{2}}{\sqrt{(1 + \sqrt[3]{2})}},$$

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{2}} = \frac{a}{\sqrt{(1 + \sqrt[3]{2})}}.$$

Voor de zoo even gevondene waarde van x, wordt

$$F_2(x) = \frac{3x^2 + 3\sqrt{2}.x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{2}.\,x^2\sqrt{(a^2 - x^2)^3}},$$

dus positief, ten blijke van het bestaan eens maximums, bij de gegevene functie.

Men zou in de oplossing van dit problema ook aldus hebben kunnen te werk gaan. De functie

$$F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y\sqrt{2}},$$

ten aanzien van x differentiërende, en hierbij y als eene functie van x beschouwende, komt er terstond

$$F_1(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dy}{dx}.\frac{1}{y^2}.$$

Maar uit de vergelijking

$$y^2 = a^2 - x^2,$$

volgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};$$

welke waarde in die van $F_1(x)$ gesubstitueerd, geeft

$$F_1(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{y^3} = 0,$$

dus $$y = \frac{x}{\sqrt[4]{2}}.$$

$$y^2 = \frac{x^2}{\sqrt[4]{2}} = a^2 - x^2. \qquad x = \frac{a\sqrt[4]{2}}{\sqrt{(1+\sqrt[4]{2})}}.$$

Wijders volgt uit

$$F_1(x) = \frac{-y^3\sqrt{2} + x^3}{x^2y^3\sqrt{2}},$$

$$F_2(x) = \frac{-3y^2\frac{dy}{dx}\sqrt{2} + 3x^2}{x^2y^3\sqrt{2}},$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\left\{\frac{y\sqrt{2}+x}{xy^3}\right\} \text{ positief.}$$

Stellende nog den halven tophoek des kegels $= \varphi$, dan heeft men $tg.\,\varphi = \frac{y}{x} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, waaruitvoor de grootte des tophoeks gevonden wordt $83^o.23'.44'',16$.

3°. *Onder alle regthoekige driehoeken van denzelfden perimeter, den zoodanigen te vinden, welks inhoud een maximum zij.*

Men stelle voor de beide regthoekszijden x en y, dan heeft men, a den perimeter noemende, de twee vergelijkingen

$$x + y + \sqrt{(x^2 + y^2)} = a. \qquad xy = \text{Maxim.} \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Uit de eerste de waarde y afzonderende, vindt men op de gewone wijze

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a(a-2x)}{a-x},$$

dus

$$xy = \frac{1}{2} \frac{ax(a-2x)}{a-x}.$$

De functie

$$F(x) = \frac{x(a-2x)}{a-x} = x - \frac{x^2}{a-x},$$

alzoo een maximum moetende zijn, heeft men, na eene eerste differentiatie

$$F_1(x) = 1 - \frac{2x}{a-x} - \frac{x^2}{(a-x)^2},$$

of

$$F_1(x) = \frac{a^2 - 4ax + 2x^2}{(a-x)^2} = 0,$$

waaruit volgt $x = a(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}})$. Het bovenste teeken behoort hier echter verworpen te worden, vermits x niet $>$ a kan zijn. In deze onderstelling komt er

$$F_2(x) = \frac{4(x-a)}{(a-x)^2} = \frac{4}{x-a} = -\frac{4}{a\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

ten blijke dus dat de inhoud des driehoeks werkelijk een maximum wordt, voor $x = a(1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$. Hieruit volgt tevens $y = a(1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$, zoodat de regthoekige driehoek gelijkbeenig moet zijn.

Men zou de beide vergelijkingen (a) ook aldus hebben kunnen behandelen.

Beschouwende y als eene functie van x, en dus $xy = F(x)$ stellende, verkrijgt men door onmiddelijke differentiatie der genoemde vergelijkingen

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

of

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

en

$$1 + \frac{dy}{dx} + \frac{x + y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = 0.$$

Schrijft men hierin voor $\frac{dy}{dx}$ zijne voorgaande waarde, dan bekomt men

$$\frac{x-y}{x}+\frac{x^2-y^2}{x\sqrt{(x^2+y^2)}}=0.$$

dus
$$\frac{x-y}{x}\left\{1+\frac{x+y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right\}=0,$$

of
$$\frac{a(x-y)}{x\sqrt{(x^2+y^2)}}=0.$$

Hieraan kan eeniglijk voldaan worden door $x=y$.

De vergelijking $x+y+\sqrt{(x^2+y^2)}=a$, gaat thans over in

$$2x+x\sqrt{2}=a,$$

dus
$$x=y=\frac{a}{2+\sqrt{2}}=a(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}),$$

welke uitkomst met de vorige overeenstemt.

4°. ***Uit eenig punt* P *gelegen op de groote as eener ellips*** (fig. 15), ***den grootsten of kleinsten voerstraal* PQ *naar den omtrek te trekken.***

Dit vraagstuk, hetwelk eenige niet onbelangrijke bijzonderheden oplevert, kan aldus worden opgelost.

Laten a en b de beide halve assen der ellips, c den afstand OP, x,y de coördinaten van het punt Q, en z de lengte van den voerstraal voorstellen, dan heeft men de vergelijking

$$z^2=y^2+(x-c)^2=\text{Max. of Minim.}$$

welke, na hierin voor y^2 zijne waarde $\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ gesubstitueerd te hebben, overgaat in

$$\frac{e^2x^2}{a^2}-2cx+b^2+c^2=z^2;$$

zijnde
$$e^2=a^2-b^2.$$

Daar nu x in deze nieuwe vergelijking onbepaald kan aangroeijen, mist men hier de noodzakelijke voorwaarde, dat z, voor alle waarden van x buiten de grenzen $-a$, en $+a$ gelegen, onbestaanbaar worde. Die vergelijking alzoo niet bepaaldelijk op de ellips van toepassing te maken zijnde, is uit dien hoofde ongeschikt voor het verlangde onderzoek.

Beschouwen wij echter x, en dus ook z, als eene functie van y, dan volgt onmiddelijk uit de betrekking tusschen x en y, dat z onbestaanbare waarden verkrijgt, indien y buiten de grenzen $-b$, $+b$ genomen wordt. Wij hebben hierbij tevens het voordeel van

den geheelen omtrek der ellips te omvatten, als kunnende y zoowel positief als negatief genomen worden.

Men differentiëre diensvolgens de eerste vergelijking

$$y^2 + (x - c)^2 = z^2 = F(y) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

ten opzigte van y, dan komt er

$$F_1(y) = 2y + 2(x - c)\frac{dx}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

dus
$$y = -(x - c)\frac{dx}{dy} \ (^*).$$

Uit de vergelijking der ellips

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

volgt
$$a^2y\,dy + b^2x\,dx = 0,$$

dus
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2y}{b^2x}.$$

Deze waarde in (2) overbrengende, bekomen wij,

$$F_1(y) = 2y\left\{1 - \frac{a^2}{b^2}\frac{(x - c)}{x}\right\} = 0,$$

of
$$F_1(y) = 2y\left\{\frac{ca^2 - e^2x}{b^2x}\right\} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

waaraan voldaan kan worden, zoowel door $y = 0$, als door

$$x = \frac{ca^2}{e^2}$$

te stellen.

Ten einde hieruit tot het bestaan van eenig maximum of minimum te besluiten, differentiëre men de waarde van $F_1(y)$ op nieuw ten aanzien van y, dan heeft men, in de onderstelling van $y = 0$, waarmede $x = \pm a$ overeenkomt, en met weglating van den factor 2

$$F_2(y) = \left(\frac{ca^2 - e^2x}{b^2x}\right) = \frac{ca - e^2}{b^2} \text{ of } -\left(\frac{ca + e^2}{b^2}\right).$$

Is nu de ligging van het punt P zoodanig, dat $c > \frac{e^2}{a}$, dan zal $x = a$ een minimum, doch $x = -a$ een maximum voor den voertraal opleveren, terwijl er voor $x = a$, even als voor $x = -a$

(*) Volgens hetgeen in de XIe les zal verklaard worden, toont die vergelijking aan, dat de rigting des voerstraals steeds normaal op de kromme moet zijn.

een maximum zal plaats grijpen, indien $c < \frac{e^2}{a}$ is. In beide gevallen zullen de uiteinden des voerstraals op de groote as liggen.

Onderzoeken wij thans de tweede waarde van y, overeenstemmende met $x = \frac{ca^2}{e^2}$.

In dat geval bekomen wij

$$F_2(y) = -\frac{y}{x^2} \times \frac{ca^2}{b^2} \cdot \frac{dx}{dy},$$

$$= \frac{y}{x^2} \times \frac{ca^2}{b^2} \times \frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{ca^4}{b^4} \cdot \frac{y^2}{x^3},$$

$$= \frac{ca^2}{b^2} \frac{(a^2 - x^2)}{x^3}.$$

Voor $c < \frac{e^2}{a}$ of $x < a$, wordt $F_2(y)$ positief, en dus $F(y)$ een minimum. De onderstelling van $c > \frac{e^2}{a}$ is hier niet aannemelijk dewijl $x > a$ zoude worden. Uit al het voorgaande mogen wij alzoo het navolgende besluit trekken.

Zoo lang het punt P op eenen afstand $OP < \frac{e^2}{a}$ gelegen is, zullen er twee minima PQ, PQ' en twee maxima PB, PA voor den voerstraal aanwezig zijn; de twee eerste behooren beiden tot de abscis $x = \frac{ca^2}{e^2}$, en de twee laatste tot de abscissen $x = -a$, $x = a$. Voor grootere afstanden van het punt P, zal er slechts een minimum PB, en een maximum PA bestaan.

Er blijft thans nog te onderzoeken overig het bijzondere geval van $c = \frac{e^2}{a}$, als wanneer de verg. (3) overgaat in

$$F_1 y) = 2\frac{e^2}{b^2}\left(\frac{a - x}{x}\right) y,$$

welke voor $y = 0$, en dus voor $x = \pm a$, nul wordt.

Eene tweede differentiatie geeft, met weglating van den positieven factor $2\frac{e^2}{b^2}$

$$F_2(y) = \frac{a-x}{x} - \frac{ay}{x^2} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{a-x}{x} + \frac{a^2 y^2}{b^2 x^3}.$$

$$= \frac{a-x}{x} + a\frac{(a^2 - x^2)}{x^3} = \frac{a^3 - x^3}{x^3}.$$

Voor $x = -a$, verkrijgt $F_2(y)$ eene negatieve waarde, en wijst dus

een maximum aan. Voor $x = a$, $F_2(y)$ nul wordende, zal men op nieuw hebben te differentiëren. Men bekomt alsdan

$$F_3(y) = -\frac{3a^3}{x^4} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{3a^5}{b^2} \cdot \frac{y}{x^5},$$

welke functie insgelijks voor $x = a$ of $y = 0$ verdwijnt.

Eene vierde differentiatie geeft

$$F_4(y) = \frac{3a^5}{b^2} \left\{ \frac{1}{x^5} + \frac{5y}{x^6} \times \frac{a^2y}{b^2x} \right\}.$$

Deze functie voor $x = a$ eene positieve waarde verkrijgende, zoo wordt hierdoor het bestaan van een minimum aangewezen.

Het blijkt alzoo dat er, ingeval van $c = \frac{e^2}{a}$, slechts een minimum PB, en een maximum PA voor den voerstraal plaats heeft, even als in het geval van $c > \frac{e^2}{a}$.

De navolgende vraagstukken worden den lezer tot eigen oefening voorgesteld.

5. *Van alle driehoeken die dezelfde basis hebben en van gelijken omtrek zijn, dengenen te bepalen welks inhoud een maximum zij?*

Antw. De driehoek moet gelijkbeenig zijn.

6. *Op eene gegevene regte lijn eenig punt* O *te bepalen, zoodanig dat de afstanden van dat punt tot twee gegevene punten* A *en* B, *aan dezelfde zijde dezer lijn gelegen, een minimum worde?*

Antw. De lijnen AO, BO zullen gelijke hoeken met de gegevene lijn moeten maken.

7. *Door eenig punt* P, *gelegen binnen eenen regten hoek* BAC, *eene lijn* BPC *te trekken, welke van dien hoek den kleinsten driehoek afsnijde?*

Antw. De lijn moet zoodanig getrokken worden dat de hoeken ACP, PAC even groot zijn.

8. *In een' gegeven bol den grootst mogelijken cilinder te plaatsen?*

Antw. Den straal des bols r noemende, zal die van het grondvlak des cilinders zijn $\frac{r}{3}\sqrt{6}$.

9. *In een' gegeven bol den grootst mogelijken kegel te plaatsen?*

Antw. Den straal des bols r noemende, zal men voor de hoogte des kegels vinden $\frac{4r}{3}$.

10. *In een' gegeven kegel den grootsten cilinder te plaatsen?*

Antw. De hoogte van den cilinder moet een derde van die des kegels bedragen

11. *Onder vier gegevene lijnen eenen vierhoek zamen te stellen welks inhoud een maximum zij?*

Antw. De hoekpunten van den vierhoek zullen in den omtrek eens cirkels moeten liggen.

12. *In een' gegeven driehoek* ABC *de kortste lijn* DE *te trekken, welke dezen driehoek in twee gelijke deelen verdeelt?*

Antw. Indien *A* de kleinste der drie hoeken is, zal de afgesneden driehoek *DAE* gelijkbeenig moeten zijn, *DE* tot basis hebbende.

13. *Onder alle regthoekige driehoeken van gelijken inhoud, dengenen te bepalen, welks omtrek een minimum zij?*

Antw. De driehoek moet gelijkbeenig zijn.

14. *Te onderzoeken of de functie*

$$y = (x-a)^2 \left\{1 - \sqrt{\left(\frac{x-a}{a}\right)}\right\}$$

een maximum of minimum toelaat?

Antw. $x = \frac{41}{25}a$ zal y tot een maximum maken.

15. *Hetzelfde van de functie*

$$y = x - \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

Antw. y wordt een maximum voor $x = 1$ en een minimum voor $x = \frac{35}{27}$.

16. *Hetzelfde van de functie.*

$$y = \sqrt{\frac{(a+x)^3}{a-x}}.$$

Antw. Die functie is voor geen maximum noch minimum vatbaar.

NEGENDE LES.

Gebruik der differentiaal-rekening bij de ontbinding van rationale gebrokens in meer eenvoudige gebrokens.

§ 69. In de 21e les onzer *Hoogere Algebra*, zijn reeds verschillende handelwijzen ontwikkeld, waarvan men zich bij de ontbinding van rationale gebrokens kan bedienen. Wij zullen thans aantoonen welk hulpmiddel men daarenboven uit de differentiaal-rekening ontleenen kan, om de tellers der partiële gebrokens, elk afzonderlijk te bepalen, zonder dat het hierbij noodig zij een stelsel vergelijkingen van den eersten graad op te lossen.

Laten namelijk $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... $x-k$, de eerste magtsfactoren van den noemer des gebroken $\frac{f(x)}{F(x)}$ aanduiden. Zij wijders de teller $f(x)$ een polynomium van een lageren graad dan de noemer $F(x)$, in welk geval de gevraagde ontbinding, zoo als ter aangehaalde plaatse gebleken is, slechts op eene wijze geschieden kan. Men stelle nu

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots \frac{K}{x-k},$$

waaruit volgt

$$f(x) = A\frac{F(x)}{x-a} + B\frac{F(x)}{x-c} \dots\dots + \frac{KF(x)}{x-k}.$$

Voor $x = a$, zijnde een der wortels van de vergelijking $F(x) = 0$, verdwijnen al de termen van het tweede lid der voorgaande vergelijking, met uitzondering nogtans van den eersten term, die den onbepaalden vorm $\frac{0}{0}$ aanneemt. Volgens het geleerde in de Ve *Les*, verkrijgt de breuk $\frac{F(x)}{a-x}$ alsdan de bepaalde waarde $F_1(a)$. Gevolgelijk komt er

$$f(a) = AF_1(a),$$

waaruit men, ter bepaling van A, afleidt

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)}.$$

Het is klaar, dat men voor de overige tellers op gelijke wijze bekomt

$$B = \frac{f(b)}{F_1(b)}, \qquad C = \frac{f(c)}{F_1(c)} \text{ enz.}$$

en hieruit ontstaat de algemeene formule

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(a)}{F_1(a)} \frac{1}{x-a} + \frac{f(b)}{F_1(b)} \frac{1}{x-b} + \frac{f(c)}{F_1(c)} \cdot \frac{1}{(x-c)} + \text{enz.} \quad (1)$$

In het bijzonder geval van $f(x) = F_1(x)$ worden $A = B = C .. = 1$, en dus

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \cdots + \frac{1}{x-k},$$

welke eigenschap ook onmiddelijk zou kunnen afgeleid worden uit het differentiëren der logarithmische vergelijking

$$lF(x) = l(x-a) + l(x-b) \ldots + l(x-k).$$

Zijn de factoren van $F(x)$, van den vorm $ax - \beta$, enz. dan zal men, voor het partiele gebroken $\frac{A}{ax-\beta}$, schrijvende $\frac{A}{a} \times \frac{1}{x - \frac{\beta}{\alpha}}$, na $\frac{\beta}{\alpha} = a$ gesteld te hebben, op gelijke wijze als voren bekomen

$$f\left(\frac{\beta}{a}\right) = \frac{A}{a} F_1\left(\frac{\beta}{a}\right),$$

dus
$$A = a \frac{f(a)}{F_1 a)}.$$

Voorbeeld.
$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{3x^2 + 32x - 88}{x^3 - x^2 - 14x + 24}.$$

$$F(x) = (x-2)(2-3)(x+4).$$

$$a = 2. \quad b = 3. \quad c = -4.$$

$$F_1(x) = 3x^2 - 2x - 14.$$

$$F_1(2) = -6. \qquad F_1(3) = 7. \qquad F_1(-4) = 42.$$

$$f(2) = -12. \qquad f(3) = 35. \qquad f(-4) = -168.$$

dus $A = 2. \qquad B = 5. \qquad C = -4.$

$$\frac{3x^2 + 32x - 88}{x^3 - x^2 - 14x + 24} = \frac{2}{x-2} + \frac{5}{x-3} - \frac{4}{x+4}.$$

Uit de waarde van

$$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-k),$$

volgt door differentiatie

$$F_1(x) = (x-b)(x-c)(x-d) \ldots (x-k)$$
$$+ (x-a)(x-c)(x-d) \ldots (x-k) + \text{enz.}$$

en dus voor $x = a$, $x = b$, $x = c$ enz.

$$F_1(a) = (a-b)(a-c)(a-d)\dots(a-k),$$
$$F_1(b) = (b-a)(b-c)(b-d)\dots(b-k),$$
$$F_1(c) = (c-a)(c-b)(c-d)\dots(c-k),$$
enz. enz.

welke uitkomsten andere vormen opleveren ter berekening der waarden van $A, B, C..$, zonder voorafgaande differentiatie der functie $F(x)$, en ook overeenstemmen met die, welke in § 206 der *Hoogere Algebra*, langs een' anderen weg verkregen zijn.

Substitueert men de voorgaande uitdrukkingen voor $F_1(a)$. $F_1(b)$..., in de form. (1), nadat men deze met den noemer

$$F(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-k)$$

vermenigvuldigd heeft, dan ontstaat hieruit de bekende interpolatie-formule van LAGRANGE, in § 203 van ons aangehaald werk, doch zonder betoog medegedeeld, te weten

$$f(x) = \frac{(x-b)(x-c)\dots(x-k)}{(a-b)(a-c)\dots(a-k)}f(a) + \frac{(x-a)(x-c)\dots(x-k)}{(b-a)(b-c)\dots(b-k)}f(b)$$
$$+ \frac{(x-a)(x-b)\dots(x-k)}{(c-a)(c-b)\dots(c-k)}f(c) + \text{enz.}$$

§ 70. De voorgaande handelwijze blijft evenzeer van toepassing op het geval dat de verg. $F(x) = 0$ twee of meer onbestaanbare wortels heeft, en er dus onder de partiële gebrokens eenige van den vorm $\frac{A+Bx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ voorkomen. Men stelle alsdan

$$a = \alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{en} \quad b = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

$$\frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F_1(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = M + N\sqrt{-1},$$

$$\frac{f(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{F_1(\alpha-\beta\sqrt{-1})} = M - N\sqrt{-1},$$

dus

$$\frac{M+N\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{M-N\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}} = \frac{A+Bx}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

waaruit volgt

$$A = -2(\beta N + \alpha M), \qquad B = 2M.$$

Op gelijke wijze laten zich de coëfficiënten van de tellers der overige breuken bepalen.

Zij bijv. $$\frac{fx}{F(x)} = \frac{x^n}{x^m+1},$$
en laat hierbij m een even getal zijn, dan kan de noemer ontbonden worden in $\frac{m}{2}$ tweede-magtsfactoren van den vorm
$$x^2 - 2x\cos.a + 1,$$
waarin $a = \left(\frac{2k+1}{m}\right)\pi$, en k alle waarden verkrijgt van 0 tot $\frac{1}{2}m - 1$ ingesloten (*), zoodat de partiële breuken alle zijn van den vorm $\frac{A+Bx}{x^2-2x\cos.a+1}$.

Nu is, in ons geval, $\alpha = \cos.a$, $\beta = \sin.a$,
$$F_1(x) = mx^{m-1} = \frac{mx^m}{x} = -\frac{m}{x},$$
$$F_1(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \frac{-m}{\cos.a+\sin.a\sqrt{-1}},$$
$$f(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = (\cos.a+\sin.a\sqrt{-1})^n = \cos.na+\sin.na\sqrt{-1},$$
$$M+N\sqrt{-1} = -\frac{1}{m}\left(\cos.(n+1)a+\sin.(n+1)a\sqrt{-1}\right),$$
$$M = -\frac{1}{m}\cos.(n+1)a,\quad N = -\frac{1}{m}\sin.(n+1)a.$$
Derhalve
$$A = \frac{2}{m}\left\{\sin.a\sin.(n+1)a+\cos.a\cos.(n+1)a\right\} = \frac{2}{m}\cos.na,$$
$$B = -\frac{2}{m}\cos.(n+1)a,$$
zoodat wij bekomen
$$\frac{x^n}{x^m+1} = \frac{2}{m}\Sigma\frac{\cos.na - x\cos.(n+1)a}{x^2-2x\cos.a+1},$$
waarin het teeken Σ zich over $\frac{m}{2}$ termen uitstrekt, die eeniglijk door de verschillende waarden van a, van elkander onderscheiden zijn.

Is m daarentegen een oneven getal $2p+1$, dan heeft men, behalve de p partiële gebrokens van den voorgaanden vorm, nog eene breuk
$$\frac{A}{x+1},\ \text{waarin}\ A = \frac{f(-1)}{F_1(-1)} = \frac{(-1)^n}{m} = \pm\frac{1}{m},$$
naar dat n even of oneven is.

(*) Men raadplege deswege de 15e les onzer *Hoogere Algebra.*

De voorgaande uitkomsten gelden insgelijks voor de ontbinding van het gebroken $\frac{x^n}{x^m-1}$, m steeds een geheel getal zijnde, mits a hier vervange worde door $\frac{2k\pi}{m}$, en A, ingeval van m oneven, door $\frac{1}{m}$.

Door $n = 0$ te stellen, verkrijgt men, ingevolge het hiervoren gevondene, m een even getal beteekenende,

$$\frac{1}{x^m+1} = \frac{2}{m} \Sigma \frac{1-x\cos.a}{x^2-2x\cos.a+1}$$

en, m oneven zijnde,

$$\frac{1}{x^m+1} = \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{x+1} + 2\Sigma \frac{1-x\cos.a}{x^2-2x\cos.a+1} \right\}.$$

Voor $\frac{1}{x^m-1}$ zijn dezelfde uitdrukkingen van toepassing, mits aan a de daartoe betrekkelijke waarden gevende.

Door wijders aan n verschillende waarden toe te kennen, is men tevens in staat op eene algemeene wijze de partiële gebrokens uit te drukken van het gebroken

$$\frac{A+Bx+Cx^2+\ldots Kx^n}{x^m\pm1}.$$

§ 71. Behandelen wij thans het geval dat de noemer $F(x)$, zoowel gelijke als ongelijke factoren bezit, en zij $x-a$ een van die gelijke factoren, die m malen voorkomt, zoodat wij voor $F(x)$ mogen stellen

$$(x-a)^m.\varphi(x),$$

en voor de breuk $\frac{f(x)}{F(x)}$, de identieke vergelijking,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-2}} \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{P}{\varphi(x)};$$

zijnde P een polynomium in x van eene lagere magt dan de noemer $\varphi(x)$.

Hieruit volgt verder, na vermenigvuldiging met $F(x)$,

$$f(x) = A\varphi(x) + A_1(x-a)\varphi(x) + A_2(x-a)^2\varphi(x) \ldots + P(x-a)^m. \quad (1)$$

De waarden der coëfficiënten A, $A_1 \ldots A_{m-1}$, laten zich nu aldus bepalen. Eerstelijk heeft men, door in de voorgaande vergelijking $x=a$ te stellen, terstond

$$f(a) = A\varphi(a) \qquad \text{dus } A = \frac{f(a)}{\varphi(a)}.$$

Wijders geven de achtervolgende differentiaal quotienten der beide leden van vergelijking (1), na $x = a$ gesteld te hebben,

$f_1(a) = A\varphi_1(a) + A_1\varphi(a)$, ,
$f_2(a) = A\varphi_2(a) + 2A_1\varphi_1(a) + 2A_2\varphi(a)$,
$f_3(a) = A\varphi_3(a) + 3A_1\varphi_2(a) + 2.3A_2\varphi_1(a) + 2.3A_3\varphi(a)$,
$f_4(a) = A\varphi_4(a) + 4A_1\varphi_3(a) + 3.4A_2\varphi_2(a) + 2.3.4A_3\varphi_1(a) + 2.3.4A_4\varphi(a)$
enz. (2)

met behulp van welke betrekkingen de waarden der coëfficiënten A, A_1, A_2... uit elkander kunnen worden afgeleid. De algemeene betrekking tusschen die coëfficiënten, is gemakkelijk uit de in § 31 voorkomende uitdrukking voor $\frac{d^n.uv}{dx^n}$ af te leiden. Stellende namelijk hier in $u = (x-a)^p$ en $v = \varphi(x)$, dan zal men, in aanmerking nemende dat

$$\frac{d.^n(x-a)^p}{dx^n} = p.(p-1)\ldots(p-n+1).(x-a)^{p-n},$$

voor $n = p$, tot waarde bekomt $1.2.3\ldots p$, en voor alle overige waarden van n, in de onderstelling van $x = a$, verdwijnt, met weinig moeite inzien, dat $n = p$ zijnde, $\frac{d.^n(x-a)^p\varphi(x)}{dx^n}$, zich in dezelfde onderstelling herleidt tot $2.3..n\varphi(a)$, en nul wordt voor $n < p$, terwijl men, voor $n > p$, slechts den term

$$n(n-1)..(n-p+1)\varphi_{n-p}(a) \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

overig houdt. Behalve dien zullen ook de achtervolgende differentiaal quotienten van den laatsten term $P(x-a)^m$ in vergel. (1), zoo lang $n < m$ is, voor $x = a$ verdwijnen. Alzoo vindt men voor het n^e differentiaal quotient van het tweede lid der vergelijking (1), in de onderstelling van $x = a$, de uitdrukking

$$f_n(a) = A\varphi_n(a) + nA_1.\varphi_{n-1}(a) + n(n-1)A_2\varphi_{n-2}(a)\ldots$$
$$+ n(n-1)\ldots(n-p+1)A_p\varphi_{n-p}(a) \ldots + 1\ldots2.\ nA_n\varphi(a) \quad . (3)$$

waarin n niet grooter dan $m-1$ te nemen is, en welke de algemeene betrekking tusschen de onbekende coëfficiënten in zich bevat.

De zoo even verklaarde handelwijze ter bepaling der tellers A, A_1... onderstelt, dat men vooraf de waarde van $\varphi(x) = \frac{F(x)}{(x-a)^m}$, en hare afgeleide functiën bekend hebbe. De hiertoe in de eerste plaats vereischte deeling kan echter insgelijks door differentiatie vermeden worden. Immers, uit de vergelijking

$$F(x) = (x-a)^m\varphi(x)$$

volgt, in overeenstemming met het hiervoren reeds opgemerkte, dat $F_n(a)$ voor alle waarden van $n < m$ nul wordt, en men in het algemeen

$$F_{m+p}(a) = (m+p)(m+p-1)..(p+1)\varphi_p(a)$$

dus
$$\varphi_p(a) = \frac{F_{m+p}(a)}{(p+1)(p+2)..(m+p)},$$

zal bevinden, waardoor alzoo de waarden der coëfficiënten A, A_1, A_2, regtstreeks door middel der afgeleide functiën van teller en noemer uitgedrukt worden.

Met behulp der zelfde formules laten zich ook de tellers der partiele gebrokens, behoorende tot de overige gelijke factoren, zoo die voorhanden mogten zijn, bepalen. Heeft de vergelijking $F(x) = 0$ bijv. nog n gelijke wortels b, dan zal men in de gevondene formules slechts a in b, m in n, en A, A_1.. in B, B_1.. behoeven te veranderen.

§ 72. Om het gebruik der voorgaande formules door een enkel voorbeeld nader toe te lichten, kiezen wij hiertoe de ontbinding van het gebroken

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{8x^5 - 97x^4 + 457x^3 - 1015x^2 + 1039x - 376}{(x-3)^4(x-1)^2},$$

De onbekende partiële gebrokens zijn hier van den vorm

$$\frac{A}{(x-3)^4} + \frac{A_1}{(x-3)^3} + \frac{A_2}{(x-3)^2} + \frac{A_3}{x-3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{(x-1)}.$$

Om de vier eerste tellers te bepalen, heeft men

$$a = 3, \quad m = 4, \quad \varphi(x) = (x-1)^2,$$

dus
$$\varphi_1(x) = 2(x-1), \quad \varphi_2(x) = -2, \quad \varphi_3(x) = 0,$$

zoodat de vergelijkingen (2) zich in dit geval tot de volgende herleiden:

$$f(a) = A\varphi(a. \qquad A = \frac{f(a)}{\varphi(a)}.$$

$$f_1(a) = A\varphi_1(a) + A_1\varphi(a). \qquad A_1 = \frac{f_1(a) - A\varphi_1(a)}{\varphi(a)}.$$

$$f_2(a) = A\varphi_2(a) + 2A_1\varphi_1(a) + 2A_2\varphi(a).$$

$$A_2 = \frac{f_2(a) - A\varphi_2(a) - 2A_1\varphi_1(a)}{2\varphi(a)}.$$

$$f_3(a) = 3A_1\varphi_2(a) + 2.3A_2\varphi_1(a) + 2.3.A_3\varphi(a)$$

$$A_3 = \frac{f_3(a) - 3A_1\varphi_2(a) - 2.3A_2\varphi_1(a)}{2.3\varphi(a)}.$$

Nu volgt uit de waarde van $f(x)$,

$$f_1(x) = 40x^4 - 388x^3 + 1371x^2 - 2030x + 1039.$$
$$f_2(x) = 160x^3 - 1164x^2 + 2742x - 2030.$$
$$f_3(x) = 480x^2 - 2328x + 2742.$$

Voor $a = 3$, komt er

$$f(a) = 32, \quad f_1(a) = 52, \quad f_2(a) = 40. \quad f_3(a) = 78.$$
$$\varphi(a) = 4, \quad \varphi_1(a) = 4, \quad \varphi_2(a) = 2.$$

$$\text{dus } A = \frac{32}{4} = 8.$$

$$A_1 = \frac{52 - 4.8}{4} = 5.$$

$$A_2 = \frac{40 - 16 - 40}{2.4} = -2.$$

$$A_3 = \frac{78 - 30 + 48}{6.4} = 4.$$

Op gelijke wijze B, B_1 bepalende, zal men vinden $B = 1$, $B_1 = 4$, en dus

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{8}{(x-3)^4} + \frac{5}{(x-3)^3} - \frac{2}{(x-3)^2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1}.$$

§ 73. In het bijzonder geval, waarin men heeft

$$F(x) = (x-a)^m,$$

en dus $\varphi(x) = 1$, geven de vergelijkingen (2), ter bepaling der tellers van de m particele gebrokens,

$$A = f(a), \qquad A_1 = f_1(a), \qquad A_2 = \frac{1}{1.2} f_2(a),$$

en in het algemeen

$$A_p = \frac{1}{1.2 \ldots p} f_p(a),$$

zijnde p hoogstens gelijk $m - 1$.

Het zal niet overbodig zijn hier nog aan te toonen, dat de reeks van Taylor onmiddellijk tot dezelfde uitkomsten leidt. Wij hebben namelijk (§ 53), voor elke functie van x,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f_1(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f_2(a) \ldots + \frac{(x-a)^m}{1.2 \ldots m} f_m \{a + i(x-a)\}$$

Is nu $f(x)$ eene geheele rationale functie van den $(m-1)^{en}$ graad, dan zal de rest der reeks geheel verdwijnen, indien men deze tot m termen voortzet. In deze onderstelling heeft men diensvolgens,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f_1(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}f_2(a) \ldots + \frac{(x-a)^{m-1}}{1.2..m-1}f_{m-1}(a),$$

dus

$$\frac{f(x)}{(x-a)^m} = \frac{f(a)}{(x-a)^m} + \frac{f_1(a)}{(x-a)^{m-1}} + \frac{1}{1.2}\frac{f_2(a)}{(x-a)^{m-2}}..+\frac{1}{1.2.m-1}\frac{f_{m-1}(a)}{x-a},$$

hetgeen met het hiervoren gevondene geheel overeenstemt.

De vergelijking $F(x) = 0$, kan ook gelijke onbestaanbare wortels $a \pm \beta\sqrt{-1}$ hebben, als wanneer $F(x) = \left((x-a)^2 + \beta^2\right)^m \varphi(x)$ wordt.

Men stelle in dat geval

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax+B}{\left((x-a)^2+\beta^2\right)^m} + \frac{A_1x+B_1}{\left((x-a)^2+\beta^2\right)^{m-1}}.. + \frac{A_{m-1}x+B_{m-1}}{(x-a)^2+\beta^2} + \frac{P}{\varphi(x)}.$$

Hieruit volgt

$$f(x) = (Ax+B)\varphi(x) + (A_1x+B_1)\left((x-a)^2+\beta^2\right)\varphi(x) + \ldots$$
$$+ (A_{m-1}x+B_{m-1})\left((x-a)^2+\beta^2\right)^{m-1}\varphi(x) + P\left((x-a)^2+\beta^2\right)^m$$

Door de substitutie van $x = a \pm \beta\sqrt{-1}$ in de vorige vergelijking, zullen al de termen van het tweede lid, met uitzondering van den eersten, verdwijnen, en men bekomt hierdoor de vergelijking

$$f(a \pm \beta\sqrt{-1}) = \left\{Aa + B \pm A\beta\sqrt{-1}\right\}\varphi(a \pm \beta\sqrt{-1}),$$

welke zich, uithoofde van den onbestaanbaren factor $\sqrt{-1}$, in twee afzonderlijke vergelijkingen, ter bepaling van A en B laat splitsen.

Dezelfde substitutie verrigtende in de achtervolgende afgeleide functien van $f(x)$, zal men bevinden, dat daarbij steeds termen zullen verdwijnen, en het vereischte aantal vergelijkingen zal ontstaan ter bepaling der overige coëfficiënten A_1, B_1, A_2, B_2 enz. Op gelijke wijze kan men ten aanzien der andere gelijke onbestaanbare wortels te werk te gaan, welke in de vergelijking $F(x) = 0$, mogten voorhanden zijn.

Het zal ons later blijken, welk nuttig gebruik van de ontbindingen der rationale gebrokens in de integraal rekening te maken is.

TIENDE LES.

Over de veranderingen in differentiaal uitdrukkingen ontstaande, door het invoeren eener nieuwe onafhankelijke veranderlijke grootheid.

§ 74. Bij het aanwijzen der achtervolgende differentiaal verhoudingen eener functie y ten opzigte van haar veranderlijk element x, door middel der gebrokens $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ enz. is ondersteld geworden (§ 30), dat dit element gelijkmatig aangroeit, of met andere woorden, dat de differentiaal dx daarbij als eene standvastige beschouwd wordt. Die onderstelling is altijd geoorloofd, zoo lang y regtstreeks in x uitgedrukt is, en deze dus als het onafhankelijke veranderlijke element kan aangenomen worden.

De zaak verandert echter van aard, zoodra y en x elk in het bijzonder in functie eener derde veranderlijke grootheid φ uitgedrukt zijn, en men dus heeft $y = F(\varphi)$, $x = f(\varphi)$, waardoor men eerst φ tusschen die beide vergelijkingen zal hebben te elimineren, om eene betrekking tusschen y en x te kunnen bekomen. Alsdan zal men, bij het achtervolgend differentiëren van y en x ten opzigte van φ, deze laatste wel met gelijke oneindig kleine verschillen mogen doen aangroeijen, doch hiermede zullen veranderlijke waarden van dx overeenstemmen, zoo dat het niet meer geoorloofd blijft dx als standvastig aan te nemen, en dus $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ enz. voor de achtervolgende differentiaal quotienten te schrijven. Wij zullen alsnu aantoonen op welke wijze hierin, met behulp der differentiaal quotienten ten aanzien van φ genomen, kan voorzien worden, In de eerste plaats merken wij op, dat, daar y eene functie van φ, en deze op hare beurt als eene functie van x te beschouwen is, wij, ingevolge § 15 mogen stellen,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}.$$

Differentierende nu elk lid dezer vergelijking ten aanzien van φ, als onafhankelijk veranderlijk element, en hierbij opmerkende, dat

men het voorste lid $\frac{dy}{dx}$ ook eerst ten aanzien van x kan differentieren, en de uitkomst vervolgens met het differentiaal quotient $\frac{dx}{d\varphi}$ vermenigvuldigen, dan verkrijgt men

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=\frac{\frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{d^2y}{d\varphi^2}-\frac{dy}{d\varphi}\frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2},$$

of wel

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{d\varphi}\frac{d^2y}{d\varphi^2}-\frac{dy}{d\varphi}\frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^3}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

zijnde de uitdrukking voor het differentiaal quotient der tweede orde, indien y en x van eene derde veranderlijke grootheid φ afhankelijk zijn.

Deze vergelijking op nieuw ten opzigte van φ differentierende, zal men daaruit eene uitdrukking voor $\frac{d^3y}{dx^3}$, in functie van

$$\frac{dy}{d\varphi},\ \frac{dx}{d\varphi},\ \frac{d^2y}{d\varphi^2},\ \frac{d^2x}{d\varphi^2},\ \frac{d^3y}{d\varphi^3},\ \frac{d^3x}{d\varphi^3},$$

kunnen afleiden, en even zoo voor de hoogere differentiaal quotienten te werk gaan, waaruit echter, zoo als te voorzien is, meer en meer zamengestelde formules zullen ontstaan.

Men zal namelijk vinden

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2\frac{d^3y}{d\varphi^3}-3\frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{d^2x}{d\varphi^2}\cdot\frac{d^2y}{d\varphi^2}+3\frac{dy}{d\varphi}\left(\frac{d^2x}{d\varphi^2}\right)^2-\frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d^3x}{d\varphi^3}}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^5}\ .\ .\ (2)$$

en zoo voorts. Deze formules laten zich evenwel ook nog onder een minder omslagtigen vorm voorstellen, indien men daarin de differentiaal quotienten door de differentialen zelve vervangt, en dus in de form. (1), teller en noemer met $d\varphi^3$ vermenigvuldigt. Deze gaat alsdan over in

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

en had even goed kunnen verkregen worden, door het quotient $\frac{dy}{dx}$ op de gewone wijze als een gebroken met veranderlijke teller en noemer te differentieren, en vervolgens door dx te deelen. Op

gelijke wijze vindt men, hetzij uit (2), hetzij door differentiatie van (3),

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dx^2d^3y - 3\,dxd^2x\,d^2y + 3\,dy(d^2x)^2 - dxdy\,d^3x}{dx^5} \quad . \; . \; (4)$$

Zoodra dus x en y als functien eener derde veranderlijke grootheid voorkomen, zal men de differentiaal verhoudingen $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $\frac{d^3y}{dx^3}$ door de zoo even gevonden uitdrukkingen (3) en (4) behooren te vervangen.

§ 75. Onderstellen wij, om zulks door een enkel voorbeeld toe te lichten, dat er tusschen y, x en φ de navolgende betrekkingen bestaan

$$y = r(\varphi + sin.\varphi), \qquad x = r(1 - cos.\varphi),$$

waaruit volgt $\quad y = \sqrt{(2rx - x^2)} + r\,B\,sinv.\frac{x}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (a)$

welke laatste, zoo als ter zijner plaatse blijken zal, de vergelijking op de regtstandige coördinaten is eener kromme genaamd *Cycloide.*

Hier zijn de differentiaal quotienten ten aanzien van φ.

$$\frac{dy}{d\varphi} = r(1 + cos.\varphi), \qquad \frac{d^2y}{d\varphi^2} = -r\,sin.\varphi,$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = r\,sin.\varphi, \qquad \frac{d^2x}{d\varphi^2} = r\,cos\,\varphi.$$

Derhalve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-r^2 sin.^2\varphi - r^2(1 + cos.\varphi)\,cos.\varphi}{r^3 sin.^3\varphi},$$

of

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{r}\,\frac{(1 + cos.\varphi)}{sin^3\varphi} = -\frac{1}{r}\,\frac{1}{(1 - cos.\varphi)sin.\varphi}.$$

Deze uitkomst kan nu ook in functie van x worden uitgedrukt, door voor $r(1 - cos.\varphi)$, te schrijven x, en voor $sin.\varphi$, $\frac{1}{r}\sqrt{(2rx - x^2)}$. Zij herleidt zich alsdan tot

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{(2rx - x^2)}}.$$

Differentieert men nu de verg. (a) onmiddelijk ten aanzien van x, dan vindt men

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} + \frac{r}{\sqrt{(2rx - x^2)}},$$

of $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r-x}{x}},$$

dus $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r}{x^2}\sqrt{\frac{x}{2r-x}} = -\frac{r}{x}\frac{1}{\sqrt{(2rx-x^2)}},$$

even als hiervoren.

Het bijzonder geval van $\varphi = y$, heeft plaats, indien men uit de vergel. $y = f(x)$, bij omkeering x als eene functie van y, en dus deze laatste als het onafhankelijk veranderlijke element beschouwt. Uit de form. (1) en (2) volgt alsdan, uithoofde van

$$\frac{dy}{d\varphi} = 1, \quad \frac{d^2y}{d^2\varphi} = 0, \quad \frac{d^3y}{d\varphi^3} = 0, \text{ enz.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 3\frac{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},$$

waardoor dus de differentiaal quotienten van y ten opzigte van x genomen, door middel van die der omgekeerde functien kunnen uitgedrukt worden.

Zij bijv. $$y = \text{Boog sin. } x,$$

dus $$x = \sin. y,$$

$$\frac{dx}{dy} = \cos. y, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -\sin. y, \quad \frac{d^3x}{dy^3} = -\cos. y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d.\, B.\sin. x}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos. y} = \frac{1}{(1-x^2)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin. y}{\cos.^3 y} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\sin.^2 y + \cos.^2 y}{\cos.^5 y} = \frac{1+2\sin.^2 y}{\cos.^5 y} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}},$$

zijnde dezelfde uitkomst, welke men door onmiddelijke differentiatie van

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

zoude verkregen hebben.

§ 76. Zij u eene veranderlijke grootheid afhankelijk van y, x en de differentiaal quotienten van y ten opzigte van x, zoo dat men in het algemeen heeft

$$u = F(y, x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \text{ enz.}).$$

Laten wijders z, en φ twee andere veranderlijke grootheden voorstellen, die met y en x verbonden zijn door de vergelijkingen

$$x = f(z, \varphi), \qquad y = \psi(z, \varphi),$$

waardoor z tevens eene functie van φ wordt, dan zal men door achtervolgende differentiatiën der voorgaande waarden van x en y daarbij $d\varphi$ standvastig aannemende, de grootheid u, met behulp der hiervoren gegevene formules, in eene functie van z, φ, $\frac{dz}{d\varphi}$, $\frac{d^2z}{d\varphi^2}$ enz. kunnen uitdrukken. Zulks vindt onder anderen eene toepassing bij den overgang van een regthoekig coördinaten stelsel, tot een polair stelsel, waarin alsdan z den voerstraal en φ den hoek tusschen dezen voerstraal en eene bepaalde lijn begrepen, voorstelt. Zoo als bekend is zijn de betrekkingen tusschen y, x, z en φ, de volgende.

$$y = z\sin.\varphi, \qquad x = z\cos.\varphi,$$

dus

$$\frac{dy}{d\varphi} = \sin.\varphi\frac{dz}{d\varphi} + z\cos.\varphi,$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \cos.\varphi\frac{dz}{d\varphi} - z\sin.\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = \sin.\varphi\frac{d^2z}{d\varphi^2} + 2\cos.\varphi\frac{dz}{d\varphi} - z\sin.\varphi,$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = \cos.\varphi\frac{d^2z}{d\varphi^2} - 2\sin.\varphi\frac{dz}{d\varphi} - z\cos.\varphi,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{d\varphi} + z\cot.\varphi}{\cot.\varphi\frac{dz}{d\varphi} - z},$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2}\frac{dx}{d\varphi} - \frac{d^2x}{d\varphi^2}\frac{dy}{d\varphi} = z^2 + 2\frac{dz^2}{d\varphi^2} - z\frac{d^2z}{d\varphi^2}.$$

Derhalve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{z^2 + 2\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 - z\frac{d^2z}{d\varphi^2}}{\left(\cos.\varphi\,\frac{dz}{d\varphi} - z\sin.\varphi\right)^3}.$$

Op gelijke wijze zal men uitdrukkingen voor de hoogere differentiaal quotienten kunnen bekomen.

§ 77. In sommige gevallen is het veranderlijke element φ waarvan y en x als functien beschouwd worden, door eene differentiaal betrekking met deze laatste grootheden verbonden. Men kan dan hierbij aldus te werk gaan.

Zij bijv. gegeven

$$dx^2 + dy^2 = d\varphi^2,$$

of

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Differentierende deze vergelijking ten aanzien van φ als onafhankelijke veranderlijke, bekomt men

$$\frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{d^2x}{d\varphi^2} + \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d^2y}{d\varphi^2} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

Is nu eene betrekking tusschen x en φ gegeven, dan vindt men ter bepaling van $\frac{dy}{d\varphi}$ en $\frac{d^2y}{d\varphi^2}$ uit (α) en (β),

$$\frac{dy}{d\varphi} = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2\right)},$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = -\frac{\frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{dx^2}{d\varphi^2}\right)}}$$

en hieruit volgt verder, met behulp van formule (1),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^3\frac{dy}{d\varphi}}.$$

Wil men alzoo eene uitdrukking

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

in eene andere vervormen, waarin niet dx, maar $d\varphi = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

standvastig aangenomen is, dan hebbe men slechts daarin voor $\frac{d^2y}{dx^2}$ te substitueren $-\frac{d^2x\,d\varphi^2}{dx^3\,dy}$ of $\frac{d^2y\,d\varphi^2}{dx^4}$. Wij zullen later gelegenheid hebben daarvan eene toepassing te maken.

Men zoude ook eenige andere differentiaal functie, bijv. ydx als standvastig kunnen aannemen. Hieruit vindt men

$$yd^2x + dx\,dy = 0,$$

en

$$d^2x = -\frac{dx\,dy}{y}.$$

Derhalve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y}\frac{dy^2}{dx^2}.$$

Men stelle zich thans voor om de vergelijking

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

opgemaakt in de onderstelling van dx standvastig, te veranderen zoodanig, dat daarbij $y\,dx$ als standvastig genomen zij.

Hierin de waarde van $\frac{d^2y}{dx^2}$, volgens de voorgaande formule substitnerende, verkrijgt men na eene ligte herleiding, voor de gevraagde vergelijking

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

Bij dergelijke vervormingen kan men ook den navolgenden weg inslaan. Men schrijve eerstelijk in de gegevene vergelijking voor de tweede en hoogere differentiaal quotienten de hiervoren (§ 74) verkregene uitdrukkingen, toepasselijk op het geval, waarin dx en dy beiden veranderlijk genomen worden; men zoeke vervolgens de bijzondere betrekking op, welke er tusschen de eerste en hoogere differentialen van x en y bestaat, ten gevolge der als standvastig aangenomen differentiaal functie. Met behulp van die betrekking zal men vervolgens in de gemelde vergelijking de noodige substitutien kunnen verrigten, waardoor zij op het onderstelde geval van toepassing wordt. De laatst behandelde vergelijking zal dienen, om het zoo even gezegde nader op te helderen.

Schrijft men namelijk in de vergelijking

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

voor $\frac{d^2y}{dx^2}$ zijne waarde toepasselijk op het geval dat y en x van eene derde veranderlijke grootheid afhankelijk zijn, te weten $\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}$, dan gaat zij over in

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} - xy\frac{dy}{dx}.\frac{d^2x}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy^2}{dx^2} = 0.$$

Nu is hiervoren reeds gevonden

$$d^2x = -\frac{dx\,dy}{y}.$$

Substituerende thans voor $\frac{d^2x}{dx^2}$ zijne waarde $-\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$, dan geeft de voorgaande vergelijking wederom

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0,$$

waarbij op te merken valt, dat de factor $\frac{d^2y}{dx^2}$ thans niet meer het tweede differentiaal quotient van y ten opzigte van x beteekent.

§ 78. Om nu omgekeerd uit deze laatste vergelijking de oorspronkelijke, waaruit zij afgeleid is, terug te vinden, stelle men $ydx = d\varphi$, en beschouwe y als eene functie van φ, dan zal men de gegevene vergelijking aldus kunnen schrijven:

$$x\frac{d^2y}{d\varphi^2} - \frac{dy}{d\varphi}.\frac{dx}{d\varphi} = 0.$$

Thans herstelle men hierin de veranderlijkheid van $d\varphi$, waardoor de laatste vergelijking over gaat in

$$x\left\{\frac{d^2y}{d\varphi^2} - \frac{dy\,d^2\varphi}{d\varphi^3}\right\} - \frac{1}{y}.\frac{dy}{d\varphi} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Daarentegen beschouwe men dx standvastig in $d\varphi = ydx$, dan komt er, na differentiatie,

$$d^2\varphi = dy\,dx,$$

dus

$$\frac{dy\,d^2\varphi}{d\varphi^3} = \frac{dy^2dx}{d\varphi^3} = \frac{1}{y^3}\frac{dy^2}{dx^2}.$$

Door deze substitutie, en die van ydx voor $d\varphi$, in de vergelijking (a), vindt men

$$x\left\{\frac{1}{y^2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{y^3}\frac{dy^2}{dx^2}\right\}-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=0,$$

of

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy^2}{dx^2}-y\frac{dy}{dx}=0,$$

hetgeen juist de oorspronkelijke vergelijking terug geeft.

Dit enkele voorbeeld zal voldoende zijn, om den weg aan te wijzen, dien men bij dergelijke omgekeerde herleidingen te volgen heeft. Bij de behandeling van de theorie der kromme lijnen zal zich tevens gelegenheid opdoen, het onderwerp dezer les in nadere toepassing te brengen.

ELFDE LES.

Theorie der vlakke kromme lijnen, volgens hare vergelijking op regthoekige coördinaten-assen. Bepaling der raaklijnen, normalen, enz. Onderzoek nopens het bestaan van assymptoten. Kenmerken van het aanwezen van buig- en keerpunten.

§ 79. Wij gaan thans over tot eene der belangrijkste toepassingen der differentiaal-rekening, tot die namelijk, welke de theorie der kromme lijnen ten onderwerp heeft. Wij zullen hierdoor in de gelegenheid gesteld worden meer en meer het nuttige gebruik te leeren kennen, dat er van de afgeleide functiën te maken is, bij het opsporen van de eigenschappen eener door hare vergelijking gegevene kromme.

De beschouwing der raaklijnen en normalen zal ons in de eerste plaats bezighouden. Wij onderstellen hierbij, dat de vergelijking der kromme op een regthoekig coördinaten-stelsel betrekking heeft. De overgang tot een polair coördinaten-stelsel zal later afzonderlijk worden behandeld.

§ 80. Bij het onderzoek van den loop en vorm eener kromme, komt in de eerste plaats in aanmerking de stand der raaklijnen in de opvolgende punten, waardoor van zelve de rigting der elementen of oneindig kleine deelen van den omtrek der kromme aangewezen wordt.

Reeds in § 5 hebben wij, uit het begrip der limiet van de verhouding tusschen twee van elkander afhankelijke differentialen afgeleid, dat, indien $y = F(x)$ de vergelijking eener kromme voorstelt, het eerste differentiaal quotient $\frac{dy}{dx}$ of $F_1(x)$, alsdan den tangens aanwijst van den hoek ω tusschen de raaklijn van eenig punt der kromme en het positieve deel van de as der x begrepen. Men heeft diensvolgens,

$$tg.\omega = \frac{dy}{dx},\quad sin.\omega = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)}},$$

$$cos.\omega = \frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}.$$

Zij nu $y = Ax + B$ de vergelijking der raaklijn MT (*fig.* 1), getrokken door eenig punt M eener kromme, en noemen wij x_1, y_1 de coördinaten van dat punt, dan zal, omdat hier A de waarde van $\frac{dy_1}{dx_1}$ voorstelt, de vergelijking der raaklijn worden

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1) \quad \ldots \ldots \text{(1)}$$

Hieruit volgt onmiddelijk, dat de door hetzelfde punt (x_1, y_1) getrokken normaal MR tot vergelijking zal hebben,

$$y - y_1 = -\frac{dx_1}{dy_1}(x - x_1) \quad \ldots \ldots \text{(2)}$$

Is de kromme gegeven door eene vergelijking van den vorm $F(x, y) = 0$, dan heeft men (§ 34),

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

waardoor de voorgaande vergelijkingen voor de raaklijn en de normaal, overgaan in

$$(y - y_1)\frac{dF}{dy_1} + (x - x_1)\frac{dF}{dx_1} = 0 \quad \ldots \ldots \text{(3)}$$

$$(y - y_1)\frac{dF}{dx_1} - (x - x_1)\frac{dF}{dy_1} = 0 \quad \ldots \ldots \text{(4)}$$

Moet echter het punt bepaald worden, alwaar de raaklijn evenwijdig aan eene gegevene lijn loopt, dan kan zulks geschieden met behulp der vergelijkingen

$$y = F(x), \qquad tg.\omega = \frac{dy}{dx} = F_1(x).$$

Men zal opmerken, dat de vergelijking der raaklijn zich onmiddelijk uit de differentiaal vergelijking der kromme, namelijk

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0,$$

laat afleiden, door slechts in $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, voor x, y te schrijven x_1, y_1, en dx en dy te vervangen door $x - x_1$ en $y - y_1$, terwijl men de vergelijking der normaal bekomt, door voor dx en dy te schrijven $y - y_1$ en $-(x - x_1)$.

§ 81. **Met toepassing op de ellips of de hyperbool heeft men**

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = a^2b^2,$$

dus $$\frac{dF}{dy} = 2a^2y, \qquad \frac{dF}{dx} = \pm 2b^2x,$$

zoodat de vergelijkingen der raaklijn en der normaal worden,

$$a^2y_1(y-y_1) \pm b^2x_1(x-x_1) = 0.$$

$$b^2x_1(y-y_1) \mp a^2y_1(x-x_1) = 0.$$

De eerste kan ook aldus voorgesteld worden

$$a^2yy_1 \pm b^2xx_1 = a^2b^2,$$

waaruit volgt $$tg.\,\omega = \mp \frac{b^2x_1}{a^2y_1};$$

welke formule aantoont, dat voor alle punten der ellips, alwaar de beide coördinaten hetzelfde teeken hebben, de raaklijn de positieve as der abscissen onder eenen stompen hoek snijdt, terwijl voor alle punten welker coördinaten met ongelijke teekens aangedaan zijn, deze snijding der raaklijn onder een' scherpen hoek geschiedt; dat echter bij de hyperbool juist het tegenovergestelde plaats vindt, zoo als zulks uit de beschouwing van elke dezer krommen bevestigd wordt.

Bij den cirkel is de vergelijking der raaklijn

$$xx' + yy' = r^2,$$

en die der normaal

$$yx_1 - xy_1 = 0, \quad \text{dus } y = \frac{y_1}{x_1}x,$$

ten blijke dat deze lijn door het middelpunt gaat.

Voor de parabool $y^2 = px$, komt er

$$2y\,dy - p\,dx = 0.$$

Vergel. der raaklijn

$$2y_1(y-y_1) - p(x-x_1) = 0,$$

of $$yy_1 - \frac{1}{2}p(x+x_1) = 0.$$

Vergel. der normaal

$$p(y - y_1) + 2y_1(-x_1) = 0.$$

Voor een willekeurig punt dezer kromme is

$$tg.\,\omega = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}.$$

Uit *fig.* (1) zal men wijders voor de lengte der raaklijn, subtangens, normaal en subnormaal, gemakkelijk de navolgende uitkomsten verkrijgen.

$$MT = \frac{y}{\sin.\omega} = y\sqrt{(1+\frac{dx^2}{dy^2})}, \qquad PT = y\cot.\omega = \frac{ydx}{dy},$$

$$MR = \frac{y}{\cos.\omega} = y\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}, \qquad PR = y\,tg.\omega = \frac{ydy}{dx}.$$

Ten aanzien van den subtangens PT zij de opmerking bijgevoegd, dat hij hier als positief beschouwd wordt in de rigting der negatieve abscissen, zoodat, indien bij de toepassing op eenige kromme, deze lijn eene negatieve waarde bekomt, zulks aanduidt dat de subtangens in de rigting der positieve abscissen moet uitgezet worden.

De voorgaande formules gelden eeniglijk voor de as der x. Verwisselt men daarin x met y en dx met dy, dan zullen zij de lengte der voormelde lijnen met betrekking tot de as der y doen kennen. Hare toepassing op elke der drie kegelsneden kan geene zwarigheid opleveren.

§ 82. Nemen wij thans tot een ander voorbeeld de *cycloide* ABC (*fig.* 16), welke kromme, gelijk bekend is, voortgebragt wordt door eenig punt A van den omtrek eens cirkels, die over eene onbepaalde lijn AX rolt, zoodat deze eene raaklijn aan den cirkel omtrek blijft.

Zij M de plaats van het bewegende punt, nadat de straal des cirkels den hoek NOM doorgeloopen, en het punt A den boog AM der kromme beschreven heeft. Alsdan komt de lengte des cirkelboogs MN met die der lijn AN overeen. Stellen wij den straal $OM = r$, den veranderlijken hoek $NOM = \varphi$, en de coördinaten van het punt M ten opzigte der door het punt A gebragte assen AX, $AY = x, y$, dan is het uit de figuur ligtelijk op te maken, dat men zal hebben

$$x = AN - NP = r(\varphi - \sin.\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$
$$y = NO - OS = r(1 - \cos.\varphi,)$$

waaruit volgt voor de betrekking tusschen de regthoekige coördinaten,

$$x = r\,B\,\sin.v.\frac{y}{r} - \sqrt{(2ry - y^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

$\varphi = \pi$ stellende, heeft men $x = r\pi$, $y = 2r$, voor de coördinaten van den top B der cycloide.

Is $\varphi = 2\pi$, dan wordt $x = 2r\pi = AC$ en $y = 0$. Daar de hoek φ onbepaald kan toenemen, zal de *cycloide* uit een oneindig aantal takken bestaan, zoodat er met dezelfde waarde van y, een oneindig aantal verschillende waarden van x overeenstemmen, hetgeen ook door de vergelijking (β) bevestigd wordt.

Veelal is men gewoon het punt B tot oorsprong, en de afstanden $BQ = x$, $MQ = y$ tot coördinaten van eenig punt M aan te nemen. Door nu in (β) voor y, $2r - x$, en voor x, $r\pi - y$ te substitueren, gaat de vergelijking der kromme over in

$$y = rB\,sinv.\frac{x}{r} + \sqrt{(2rx - x^2)},$$

en men vindt na differentiatie,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{2r - x}{x}\right)},$$

Voor $x = 2r$, wordt $\frac{dy}{dx} = 0$, en voor $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \infty$. De raaklijnen in de punten A en B staan dus respectievelijk loodregt op AX en op BX. Daar wijders

$$\sqrt{\left(\frac{2r - x}{x}\right)} = \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{x} = \frac{RQ}{BQ} = tg.\,RBQ,$$

laat zich hieruit onmiddelijk opmaken, dat de raaklijn MT aan eenig punt M der kromme evenwijdig loopt met de koorde BR, waaruit verder volgt, dat de koorde RX, en dus ook de daarmede evenwijdige koorde MN, de rigting der normaal in dat punt zal aanwijzen.

De vergelijkingen (α) ten opzigte van φ gedifferentiëerd, geven voor het stelsel assen gaande door den oorsprong A,

$$\frac{dx}{d\varphi} = r(1 - cos.\,\varphi), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = r\,sin.\,\varphi,$$

dus $$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - cos.\,\varphi}{sin.\,\varphi} = tg.\,\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{y}{2r - y}\right)},$$

hetgeen met de voorgaande uitkomst overeenstemt. Hieruit vindt men verder

$$MT = y\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)} = y\sqrt{\left(\frac{2r}{2r - y}\right)}.$$

$$PT = y\frac{dx}{dy} = y\sqrt{\left(\frac{y}{2r-y}\right)}.$$

$$MN = y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{2ry}.$$

$$PN = y\frac{dy}{dx} = \sqrt{y(2r-y)}.$$

§ 83. De in § 81 voorkomende algemeene formules voor de lengten der lijnen MT, MR kunnen, door het invoeren van den differentiaal des boogs AM, welks lengte van eenig bepaald punt A (*fig.* 17) geteld wordt, tot eenen meer eenvoudigen vorm gebragt worden. Men stelle namelijk deze lengte $= s$, en late de abscis x met $PP' = \Delta x$ aangroeijen, waardoor AM in $AM' = s + \Delta s$ overgaat. Trekkende wijders de koorde MM', dan is

$$MM' = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)},$$

dus

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{\left(1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}\frac{\Delta s}{M'M}.$$

Indien nu de punten M', M meer en meer tot elkander naderen, zullen de verschillen Δx, Δy, Δs, tegelijk met de koorde MM, oneindig kleinen worden. Hierdoor bekomen wij voor de limiet der verhouding $\frac{\Delta s}{\Delta x}$,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} \times \text{lim.}\left(\frac{\Delta s}{MM'}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Deze laatste limiet laat zich aldus bepalen. Trekken wij de raaklijn in het punt M', snijdende die van het punt M in Q, dan is, volgens eene bekende eigenschap, de boog $MM' < MQ + M'Q$ en $> MM'$ (*). Wijders heeft men in den driehoek MQM',

---

(*) Voor hen die van deze stelling een betoog verlangen, diene het navolgende:

Zij $abcdef$ (*fig.* 18) eene gebrokene lijn of een gedeelte van den omtrek eens veelhoeks; men vereenige de beide uiteinden door de lijn af, en verlenge de beide uiterste zijden tot op hare snijding in k, zoo mede de zijden ed en dc tot in g en h, dan heeft men de ongelijkheden,

$$ab + bc < ah + hc$$
$$cd + ch < gh + gd$$
$$de + gd < kg + ke,$$

waaruit door optelling onmiddelijk volgt,

$$ab + bc + cd + de + ef < ak + kf.$$

$$MM' = MQ\,cos.\,M + M'Q\,cos.\,M',$$

dus $$MQ + M'Q - MM' = MQ\,sinv.\,M + M'Q\,sinv.\,M'.$$

Gaan nu de drie zijden van dezen driehoek in oneindig kleinen over, dan is zulks met de hoeken M en M' insgelijks het geval, vermits de hoek MQM' meer en meer tot 180° nadert. Hierdoor wordt het verschil $MQ + M'Q - MM'$, en dus, *a fortiori*, het verschil tusschen den oneindig kleinen boog MM' en zijne koorde, eene oneindig kleine van de derde orde, waaruit terstond volgt (§ 9), dat de verhouding tusschen Δs en de koorde MM' de eenheid tot limiet heeft, en de vergel. (γ) derhalve herleid wordt tot deze:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)},$$

of $$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Wij besluiten hieruit, dat, ingeval de regthoekige driehoek $MM'M''$, en dus ook de boog MM' oneindig klein wordt, deze door zijne koorde mag worden vervangen.

§ 84. Zie hier nog een ander betoog der zoo even gevondene differentiaal betrekking, waarbij men de leer der oneindig kleinen niet behoeft tot grondslag te nemen.

Men verlenge de raaklijnen aan de punten M en M' tot in de punten N' en N, gelegen op de verlengde ordinaten dezer beide punten, dan zullen, indien de ordinaten der kromme over de geheele uitgestrektheid des boogs MM' toenemende zijn, de hoeken $N'TP$, $NT'P$ scherp, en dus de hoeken $QM'N'$, QNM stomp wezen. Hieruit volgt $QN' > QM'$, en $MM' > NM'$, dus ook boog $MM' < MQ + QM' < MN'$, en boog $MM' > MM' > NM'$. Trekkende nog de lijn Mn evenwijdig aan NM', dan is de lengte van den boog MM' begrepen tusschen die der lijnen Mn en MN'.

Men mag dus aannemen, dat er onder al de lijnen, die uit M naar eenig op de lijn $N'n$ gelegen punt, getrokken kunnen worden, eene zal zijn, welker lengte juist met die des boogs overeenkome, of hetgeen hetzelfde is, dat er op dezen boog ergens een punt m te vinden zal zijn, zoodanig dat het gedeelte tmr der raaklijn in dat punt,

---

Door wijders de zijden des veelhoeks op de lijn af te projecteren, verkrijgt men

$$ab + bc + cd + de + ef > af.$$

Deze beide uitkomsten onafhankelijk zijnde van het aantal zijden des veelhoeks, zullen ook waar blijven, ingeval de veelhoek tot eene kromme lijn overgaat, waardoor dus het gestelde bewezen is.

begrepen tusschen de verlengde ordinaten MP, $M'P'$, juist in lengte gelijk zij aan den boog MM'.

Zijn nu x, $x+k$, $x+h$ de abscissen der punten M, m, M', en $y = F(x)$ de vergelijking der kromme, dan heeft men, s als eene functie van x beschouwende, volgens de reeks van TAYLOR,

$$Boog\ MM' = \Delta s = h\frac{ds}{dx} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2s}{dx^2} + \text{enz.}$$

De hoek begrepen tusschen de raaklijn van het punt m en de as der abscissen, heeft tot tangens $F_1(x+k)$, zoodat de lengte tr van deze raaklijn uitgedrukt wordt door $h\sqrt{(1+(F_1^2(x+k))}$. Stelt men nu deze waarde gelijk aan de lengte des boogs MM', dan komt er, na de vergelijking door h gedeeld te hebben,

$$\frac{ds}{dx} + \frac{1}{2}h\frac{d^2s}{dx^2} + \text{enz} = \sqrt{\{1 + F_1^2(x+k)\}},$$

waarin k altijd $<h$ is. Deze laatste vergelijking voor alle mogelijke waarden van h geldende, geeft voor $h = 0$, waardoor tevens k verdwijnt, terstond de differentiaal betrekking

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\{1 + F_1^2(x)\}} = \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})}.$$

Het voorgaande betoog onderstelt stilzwijgend, dat al de punten des boogs MM' aan dezelfde zijde der koorde liggen, of met andere woorden, dat er in dien boog geen buigpunt aanwezig zij. In het tegenovergestelde geval, zou men slechts de aangroeijing h zoo veel kleiner behoeven te nemen, dat de ordinaat $M'P'$ niet voorbij het buigpunt gelegen ware.

Op grond der zoo even gevondene waarde van het differentiaal quotient des boogs s als functie van x beschouwd, kunnen wij thans voor de lengten der raaklijn MT en normaal MR *fig.* (1) van eenig willekeurig punt (x, y) eener kromme, schrijven

$$MT = y\frac{ds}{dy}, \qquad MR = y\frac{ds}{dx},$$

terwijl men daarenboven, ter bepaling van de rigting der raaklijn, heeft

$$\sin.\omega = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos.\omega = \frac{dx}{ds}.$$

§ 85. Laten wij den hoek ω met zijn differentiaal $d\omega$ toenemen, dan stelt deze laatste den hoek $T'QT$ voor, (*fig.* 17) welken de raak-

lijnen gaande door twee opvolgende punten M, M', dat is, door de uiteinden van den oneindig kleinen boog ds, met elkander vormen. Om nu eene uitdrukking voor de waarde van dezen hoek te bekomen, differentiëre men de vergelijking

$$\omega = B.\,tg.\, \frac{dy}{dx},$$

ten opzigte van x, waardoor men vindt

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{d^2y}{ds^2},$$

dus $$d\omega = \frac{d^2y}{ds^2}.\,dx$$

De oneindig kleine hoek $d\omega$, welke beschouwd kan worden als aanwijzende de onderlinge helling der op elkander volgende elementen eener kromme, draagt bij de Fransche wiskundigen den naam van *angle de contingence*.

Beschouwen wij daarentegen den oneindig kleinen hoek QMM', begrepen tusschen de koorde MM' en de raaklijn in het punt M, dan laat zich gemakkelijk bewijzen, dat die hoek de helft is van den hoek TQT' of $d\omega$, en die hoeken alzoo elkander niet mogen vervangen. Immers, veronderstellende dat de boog MM' eene eindige waarde heeft, en zijne beide uiteinden tot de abscissen x en $x+h$ behooren, dan zal het verschil $N'M'$ tusschen de ordinaten van de raaklijn en van het punt M' der kromme, voor dezelfde abscis $x+h$, tot waarde hebben

$$F(x) + hF_1(x) - F(x+h) = -\frac{h^2}{2}\,F_2(x+ih).$$

Wijders is de lijn $MN' = h\,sec.\omega$, en stellende den hoek $QMM' = \varepsilon$, dan geeft de driehoek $N'MM'$ de evenredigheid,

$$MN' : M'N' = cos.(\omega - \varepsilon) : sin.\varepsilon.$$

Derhalve komt er, met weglating van het teeken van $N'M'$,

$$sin.\varepsilon = \frac{h\,F_2(x+ih)\,cos.(\omega-\varepsilon)}{2\,sec.\omega}.$$

Voor een' oneindig kleinen boog MM', gaat h in dx en $F_2(x+ih)$ in hare limiet $F_2(x)$ of $\frac{d^2y}{dx^2}$ over, terwijl men tevens voor $sin.\varepsilon$

den hoek ε zelven, en voor $\omega - \varepsilon$, ω mag substitueren. In dat geval verkrijgen wij alzoo, omdat $\cos.\omega = \frac{dx}{ds}$ is,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{d^2y\,dx}{ds^2} = \frac{1}{2}\,d\omega.$$

De verhouding der oneindig kleine hoeken MQT', $QN'M'$ heeft derhalve tot limiet het getal 2, en hieruit volgt verder, dat de driehoek MQM' als gelijkbeenig beschouwd mag worden, of met andere woorden, dat er tusschen de oneindig kleine zijden QM, QM' slechts een oneindig klein verschil van eene hoogere orde bestaat.

§ 86. Onder regtlijnige assymptoten verstaat men zoodanige lijnen welke den stand der raaklijnen op oneindig ver verwijderde punten voorstellen, en tot welke alzoo de kromme meer en meer nadert, zonder die lijnen immer te kunnen snijden.

Zij $y = ax + b$ de vergelijking eener assymptoot snijdende de as der x onder een hoek α, dan is hier a de waarde der limiet van $\frac{dy}{dx}$ voor x of $y = \infty$. De kromme meer en meer tot hare assymptoot naderende, zoodanig dat de overeenkomstige ordinaten van beide minder en minder van elkander verschillen, zal men voor de vergelijking der kromme mogen schrijven,

$$y = ax + b + X;$$

X voorstellende eene functie van x, die voor toenemende waarden van x, nul tot limiet heeft. Hieruit volgt nu dat a de limiet aanduidt van het gebroken $\frac{y}{x}$, welke limiet ook in sommige gevallen, zonder differentiaal rekening kan verkregen worden. De afstand b zal alsdan de limiet voorstellen van het verschil $y - ax$ of $y - \frac{xdy}{dx}$. Vindt men hiervoor eene oneindige waarde, te gelijk met eene eindige voor de limiet a, dan bestaat er geene assymptoot in den gewonen zin, vermits deze zich op een' oneindigen afstand van de kromme zoude verwijderen,

Indien voor $x = \infty$, $y = c$ wordt, dan is $a = 0$, dus lim. $(y - ax) = c$; de assymptoot wordt in zoodanig geval eene lijn evenwijdig aan de as der x op eenen afstand c. Voor $c = 0$, zal die as de assymptoot zelve zijn. Zulks heeft plaats onder anderen in de Logarithmische kromme $y = a^x$, alwaar $y = 0$ wordt, voor $x = \infty$.

Heeft men daarentegen $x = c$ voor $y = \infty$, dan is $a = \infty$; de assymptoot loopt in dat geval evenwijdig aan de as der y, op eenen afstand c uit den oorsprong. Voor $c = 0$ is die as zelf de

assymptoot, zoo als bijv. in de gelijkzijdige hyperbool $xy = b^2$, het geval is.

Nemen wij nog tot voorbeeld de gewone hyperbool,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

gevende $$y = \frac{\beta}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)},$$

dus $$a = \lim. \frac{y}{x} = \lim. \frac{\beta}{a} \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} = \pm \frac{\beta}{a},$$

en $$b = \lim. (y - ax) = \lim. \frac{\beta}{a} \left\{ \sqrt{(x^2 - a^2)} - x \right\} = 0.$$

De beide assymptoten gaan diensvolgens door het middelpunt, en komen in rigting overeen met de diagonalen van den op de beide assen beschreven regthoek.

De parabool $y^2 = px$ kan geene assymptoot hebben, dewijl $\lim. \frac{y}{x} = \lim. \sqrt{\frac{p}{x}} = 0$, maar daarentegen $\lim. (y - ax) = \infty$ wordt.

§ 87. De boog MM' (*fig.* 17) eener kromme wordt gezegd met zijne *holle* zijde naar de as der x gekeerd te zijn, bij aldien hij geheel gelegen is binnen den scherpen hoek tusschen de raaklijn aan het punt M en die as begrepen. Daarentegen wordt de boog gezegd zijne *bolle* zijde naar de as der x te keeren (*fig.* 19), indien hij buiten den gemelden hoek ligt. Het analytische kenmerk van elk dezer twee omstandigheden laat zich vrij spoedig uit de beschouwing der beide figuren opmaken. Immers, in het eerste geval zal de scherpe hoek tusschen de raaklijn en de as der x gevormd, voor toenemende waarden van x, over de geheele uitgestrektheid des boogs afnemende, en in het tweede geval, aangroeijende zijn.

Dezen hoek wederom ω noemende, zoo volgt uit (§ 7) dat de kromme hol of bol naar de as zal gekeerd zijn, naar dat $\frac{d.tg.\omega}{dx}$ negatief of positief is. Is nu dy positief te gelijk met dx, gelijk in de fig. 17 en 19 plaats heeft, dan is $tg.\,\omega = \frac{dy}{dx}$, en dus $\frac{d.tg.\omega}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, zoodat het teeken van $\frac{d^2y}{dx^2}$ hier zal moeten beslissen. Indien echter y en dx van ongelijke teekens zijn, zooals in de figuren 20 en 21, alsdan zal $tg.\,\omega$ door $-\frac{dy}{dx}$ voorgesteld worden. Blijkens deze laatste figuren zal de kromme *hol* of *bol* ten opzigte der as gekeerd zijn, naar

dat de scherpe hoek ω, en dus ook $tg. \omega = -\frac{dy}{dx}$ voor toenemende waarden van x, aangroeit of afneemt; gevolgelijk, naar dat $-\frac{d^2y}{dx^2}$ positief of negatief wordt, of, hetgeen hetzelfde zegt, naar dat $\frac{d^2y}{dx^2}$ negatief of positief wordt, hetwelk wederom hetzelfde kenmerk oplevert als in de beide eerste figuren.

Ligt echter de boog der kromme geheel beneden de as der x, dan zal men uit de beschouwing van daartoe betrekkelijke fignren spoedig inzien, dat de beide voorgaande gevallen zich hier juist omgekeerd voordoen, en $\frac{d^2y}{dx^2}$ alsdan positief of negatief wordt, naar dat de kromme hare bolle of holle zijde naar de as keert. Uit dit alles kunneu wij thans het volgende besluit opmaken.

Indien het tweede differentiaal quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$, *tusschen de grenzen* x_0 *en* x_1 hetzelfde *teeken behoudt als de ordinaat* y, *zal de kromme tusschen die grenzen bestendig hare* bolle *zijde naar de as der* x *vertoonen, terwijl, bij tegenovergestelde teekens van* y *en* $\frac{d^2y}{dx^2}$, *de* holle *zijde der kromme naar die as gekeerd zal zijn.*

§ 88. Eene kromme M_1MM_2 (*fig.* 22) kan gedeeltelijk met hare holle en gedeeltelijk met hare bolle zijde naar de as gekeerd zijn.

Het punt M, waarin die overgang van kromming plaats vindt, heet, zooals bekend is, een *buigpunt.* De door hetzelve getrokken raaklijn TT_1 moet de kromme tevens snijden, dewijl het eene gedeelte der kromme zich beneden, en het andere zich boven die lijn uitstrekt. Uit den loop der raaklijnen in beide deelen der kromme, zal men gemakkelijk inzien, dat de hoek MTP en dus ook de waarde van $\frac{dy}{dx}$ of $F_1(x)$ in het buigpunt M, uit den aard der zake een minimum of maximum moet worden. De eerste omstandigheid heeft plaats, wanneer het gedeelte M_1M de holle, het andere gedeelte MM_2 daarentegen de bolle zijde naar de as keert, en de tweede, in het tegenovergestelde geval, gelijk in *fig.* 23 aangewezen wordt. Deze beschouwing leidt ons, op grond der in de *VIIIe Les* ontwikkelde theorie der maxima en minima, tot den navolgenden regel voor het onderzoek van het al of niet bestaan van buigpunten in eenige kromme.

Men zoeke de waarden van x *die aan de vergel.* $F_2(x) = 0$ *voldoen, en substituere die in de functie* $F_3(x)$. *Behoudt deze hierbij eene eindige waarde, dan zullen de gevondene waarden van* x *de abscissen van even zoo vele buigpunten opleveren. Mogt echter* $F_3(x)$ *bij deze substitutiën*

nul worden, dan zal ook $F_4(x)$ *moeten verdwijnen, zonder dat zulks met* $F_5(x)$ *het geval worde. In het algemeen, zal tot het bestaan van eenig buigpunt gevorderd worden, dat aldaar eene der afgeleiden functiën van evene orde nul worde, terwijl de onmiddelijk daaropvolgende eene positieve of negatieve waarde bekome.*

Deze regel onderstelt, even als die voor het onderzoek der maxima en minima, dat geene der afgeleidene functiën eene oneindige waarde verkrijgt.

Daar het buigpunt ook beschouwd kan worden als het punt waarin het differentiaal-quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$, van den positieven tot den negatieven toestand overgaat, of omgekeerd, zal zich tevens het geval kunnen opdoen, dat $\frac{d^2y}{dx^2}$ voor eenig buigpunt oneindig groot worde. Om als dan te beslissen of men uit deze omstandigheid tot het aanwezig zijn van eenig buigpunt besluiten mag, hebbe men slechts te onderzoeken, of er in de waarde van $\frac{d^2y}{dx^2}$ eene afwisseling van teeken ontstaat, indien men de bijzondere waarde van x waarvoor zij oneindig wordt, achtervolgens eene oneindig kleine vermeerdering en vermindering doet ondergaan.

Hieruit vloeit van zelf voort, dat zoodra de afgeleide functie $F_2(x)$, voor alle mogelijke waarden van x, steeds het positieve of negatieve teeken behoudt, de kromme bestendig hare bolle of holle zijde naar de as keert, en er dus geen enkel buigpunt aanwezig kan zijn.

§ 89. Wij achten het niet ondienstig hier nog eene andere wijze van beschouwing mede te deelen, welke insgelijks tot de zoo even gevonden kenmerken leidt.

Stellen wij namelijk x en y voor de coördinaten van het buigpunt, dan zullen de ordinaten der kromme behoorende tot de abscissen $x-h$, $x+h$, (h naar welgevallen klein genomen) vóór het buigpunt *kleiner*, doch na het buigpunt *grooter* zijn dan de overeenkomstige ordinaten der raaklijn door het punt M getrokken, of ook omgekeerd, naar dat het eerste gedeelte der kromme de holle of bolle zijde naar de as keert. (*fig.* 22 *en* 23)

De ordinaten np, n_1p_1 der raaklijn hebben tot waarden,

$$y - h\,F_1(x)\,, \qquad y + h\,F_1(x)\,,$$

terwijl de overeenkomstige ordinaten in de kromme zullen uitgedrukt worden door

$$y - h\,F_1(x) + \frac{h^2}{2}F_2(x) - \frac{h^3}{2.3}F_3(x - ih),$$

$$y + h\,F_1(x) + \frac{h^2}{2}F_2(x) + \frac{h^3}{2.3}F_3(x + ih),$$

zoo dat het verschil tusschen de ordinaat der kromme en die der raaklijn, voor de abscis $x + h$ zal zijn

$$\frac{h^2}{2}F_2(x) + \frac{h^3}{2.3}F_3(x + ih),$$

en voor de abscis $x—h$,

$$\frac{h^2}{2}F_2(x) - \frac{h^3}{2.3}F_3(x - ih).$$

Daar nu die beide verschillen, voor het buigpunt (x, y), van tegengestelde teekens behooren te zijn, en h altijd klein genoeg kan genomen worden, opdat $F_3(x \pm ih)$ hetzelfde teeken behoude als $F_3(x)$, zal men zonder moeite inzien, dat $F_2(x) = 0$, eene noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van een buigpunt uitmaakt, en $F_3(x)$ daarbij eene positieve of negatieve waarde moet verkrijgen.

Voor het geval echter dat deze laatste functie te gelijk met $F_2(x)$ verdwijnt, zullen de verschillen $m'n'$, mn overgaan in

$$\frac{h^4}{2.3.4}F_4(x) + \frac{h^5}{2..5}F_5(x + ih),$$

$$\frac{h^4}{2.3.4}F_4(x) - \frac{h^5}{2..5}F_5(x - ih),$$

waaruit op gelijke wijze te besluiten is, dat er geen buigpunt kan plaats hebben, zonder dat $F_4(x)$ tevens nul zij, en $F_5(x)$ eene eindige waarde bekome, en dat, in het algemeen, het bestaan van een buigpunt verbonden is aan de voorwaarde, dat de eerste der hoogere afgeleide functien, die niet verdwijnt, van eene *onevene* orde zij, juist het tegenovergestelde van hetgeen tot het bestaan van het maximum of minimum der ordinaat y gevorderd wordt.

De figuur leert ons daarenboven, dat in het gedeelte eener kromme, waarvan de bolle zijde naar de as gekeerd is, het verschil tusschen de ordinaten der kromme en der raaklijn,

$$F(x + h) - F(x) - hF_1(x) = \frac{h^2}{2}F_2(x) + \frac{h^3}{2.3}F_3(x + ih),$$

steeds positief moet zijn, hetgeen blijkbaar alleen dan plaats kan hebben, bijaldien $F_2(x)$ over de geheele uitgestrektheid des boogs

insgelijks positief is. Immers, het tegendeel aannemende, en daarbij onderstellende dat $F_3(x)$ eene eindige waarde behoudt, zou men h klein genoeg kunnen nemen, om het verschil

$$\frac{h^2}{2}\left(F_2(x)+\frac{h}{3}F_3(x+ih)\right).$$

hetzelfde teeken als $F_2(x)$ te doen verkrijgen, en dus negatief te maken.

In geval de kromme de holle zijde naar de as keert, als wanneer het hier bedoelde verschil negatief wordt, zal het op gelijke wijze blijken, dat $F_2(x)$ negatief moet worden, even als reeds hiervoren opgemerkt is (§ 87).

Zijn echter voor een bepaald punt der kromme, $F_2(x)$ en $F_3(x)$ gelijktijdig nul, dan zal, naar dat de kromme in dat punt bol of hol is, $F_4(x)$ en, in het algemeen, eene afgeleide functie van eene evene orde positief of negatief moeten zijn.

§ 90. Wij zullen het voorgedragene thans toepassen op de drie kegelsneden begrepen in de algemeene vergelijking

$$y^2 = px + qx^2.$$

Uit deze volgt door differentiatie

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p+2qx}{2\sqrt{(px+qx^2)}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left\{2q\sqrt{(px+qx^2)}-\dfrac{(p+2qx)^2}{2\sqrt{(px+qx^2)}}\right\}}{2(px+qx^2)}$$

$$=-\frac{p^2}{4(px+qx^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{p^2}{4y^3},$$

Daar $\frac{d^2y}{dx^2}$ nimmer nul kan worden voor eene eindige waarde van y, en steeds met deze van tegenovergesteld teeken is, zoo wordt ons door deze uitkomst bevestigd, dat elke der kegelsneden met hare holle zijde naar de as der x gekeerd blijft, en alzoo nergens een buigpunt kan vertoonen.

Beschouwen wij de ellips afzonderlijk, en wel in de onderstelling dat het middelpunt niet in den oorsprong, maar binnen den hoek der positieve coördinaten x en y gelegen zij, dan heeft men, a en b de halve assen, en α en β de coördinaten van het middelpunt noemende,

$$\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2=1,$$

dus
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x-a}{y-\beta}\right),$$
en
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{\left(y-\beta-(x-a)\frac{dy}{dx}\right)}{(y-\beta)^2},$$
$$=-\frac{b^2}{a^4}\left\{\frac{a^2(y-\beta)^2+b^2(x-a)^2}{(y-\beta)^3}\right\}=-\frac{b^4}{a^2}\frac{1}{(y-\beta)^3},$$

De waarde van $\frac{d^2y}{dx^2}$ wordt hier positief of negatief, naar dat y $<$ of $>$ β genomen is, hetgeen dus aanduidt, dat de bovenste helft der kromme de holle zijde, het andere gedeelte daarentegen de bolle zijde naar de as der x keert. Voor de parabool en hyperbool zal men dezelfde uitkomst verkrijgen.

Voor de *Cycloide* is reeds hiervoren gevonden (§ 82)
$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{2r-x}{x}\right)}=\left(\frac{2r}{x}-1\right)^{\frac{1}{2}}$$
derhalve
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{r}{x^2}\times\left(\frac{2r}{x}-1\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{-r}{x\sqrt{(2rx-x^2)}}.$$

Deze kromme bezit dus geene buigpunten, maar vertoont steeds de holle zijde naar de as der x.

§ 91. Onder *keerpunten* bij de kromme lijnen verstaat men zoodanige punten waarin twee verschillende takken eene gemeenschappelijke raaklijn verkrijgen. Zij worden in twee soorten onderscheiden. Liggen namelijk de beide takken aan verschillende zijden der raaklijn, dan heeft men een keerpunt van de eerste soort, zoo als het punt M in *fig.* 24. In het tegenovergestelde geval echter wordt het een keerpunt van de tweede soort genaamd (*fig.* 24[a]).

Het bestaan van zoodanig punt is gemakkelijk hieraan te erkennen, dat de waarden van $\frac{dy}{dx}$ voor de twee verschillende takken aan elkander gelijk worden, terwijl die van $\frac{d^2y}{dx^2}$, bij het keerpunt der eerste soort, met ongelijke, en bij dat der tweede soort met gelijke teekens zullen aangedaan zijn. In het eerste geval zal dus $\frac{d^2y}{dx^2}$ in het keerpunt zelve nul of oneindig moeten zijn. Behalve dien zal ook de waarde van x, behoudens het geval waarin de raaklijn in het keerpunt der eerste soort evenwijdig aan de as der y loopt, (zoo als onder anderen in de punten A en C der cycloide *fig.* 16), steeds eene grens voor de bestaanbaarheid der ordinaten zijn.

TWAALFDE LES.

Toepassing der voorgaande theorie op het onderzoek van den loop en de eigenschappen van eenige kromme lijnen.

§ 92. Tot de kromme lijnen, waarmede zich reeds de Grieksche wiskundigen bezig hielden, behoort ook die welke den naam van *Cissoide* draagt, en aan Diocles wordt toegeschreven. Zij ontstaat op de volgende wijze.

Men rigte door het uiteinde B (*fig.* 25) der middellijn AB van een' cirkel eene onbepaalde loodlijn YY', en trekke vervolgens uit het andere uiteinde A dezer middellijn, lijnen AN naar de genoemde loodlijn, snijdende den cirkel omtrek in D. Indien men nu op de lijnen AN overal stukken $NM = AD$ uitzet, dan is de meetkunstige plaats van al de punten M eene kromme, welke den naam van *Cissoide* draagt. Dezelfde constructie aan beide zijden der middellijn verrigt kunnende worden, zoo blijkt hieruit dat de *Cissoide* uit twee oneindig voortloopende, en aan elkander gelijke takken zal bestaan. Hare vergelijking laat zich spoedig aldus opmaken.

Men neme het punt A tot oorsprong en de middellijn AB tot as der abscissen. Trekkende de loodlijnen Dd en MP op AB, dan is, r de straal zijnde, $Ad = BP = 2r - x$, dus $Dd = \sqrt{x(2r-x)}$. De gelijkvormige driehoeken ADd, AMP geven de evenredigheid

$$Ad : Dd = AP : PM$$

of

$$2r - x : \sqrt{(2r-x)x} = x : y,$$

dus

$$y = x\sqrt{\left(\frac{x}{2r-x}\right)}$$

voor de gezochte vergelijking.

Zij wijst aan: 1°. dat de kromme twee gelijke takken ter wederzijde van de as der x heeft. 2°. dat y en x gelijktijdig nul worden, en de beide takken dus door den oorsprong gaan. 3°. dat x niet $>$ $2r$, noch negatief kan zijn. 4°. dat voor $x = 2r$, $y = \infty$ wordt, zoodat de lijn YY' een assymptoot voorstelt. 5°. dat met $x = r$, $y = r$ overeenstemt, en de kromme derhalve den cirkelomtrek snijdt in een punt m, op 90° afstand van A gelegen.

Differentiëren wij thans de vorenstaande vergelijking, dan vinden wij na eene ligte herleiding,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3r-x}{2r-x} \sqrt{\left(\frac{x}{2r-x}\right)} = \frac{y}{x}\left(\frac{3r-x}{2r-x}\right).$$

In het punt A wordt $\frac{dy}{dx} = 0$, zoodat de as AB aldaar tevens raaklijn is, en dat punt dus als een keerpunt der eerste soort te beschouwen is. In B daarentegen heeft men $\frac{dy}{dx} = \infty$, waardoor het bestaan der assymptoot nader bevestigd wordt. Van maximum of minimum der ordinaat kan hier geene rede zijn, vermits $x = 0$ eene grens voor de bestaanbaarheid van y oplevert, en $\frac{dy}{dx}$ dus niet van den positieven tot den negatieven toestand kan overgaan.

De waarde van den subtangens

$$y\,\frac{dx}{dy} = \frac{x(2r-x)}{3r-x}$$

toont aan, dat men de lengte dezer lijn voor elk punt kan bepalen, door het construeren eener vierde evenredige tot de lijnen $3r-x$, $2r-x$ en x. In het bijzondere geval echter van $x = r$, vindt men $\frac{dy}{dx} = 2$, of $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{r}{2}$. De raaklijn in het punt m wordt alzoo gevonden, door dat punt te vereenigen met het punt n, genomen op de helft van den straal AC.

Om de waarde van $\frac{d^2y}{dx^2}$ te bekomen, schrijve men de voorgaande vergelijking onder dezen vorm

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{r}{2r-x},$$

dan komt er, na differentiatie van elk der leden dezer vergelijking,

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{r}{(2r-x)^2};$$

maar $\frac{x}{y} = \sqrt{\left(\frac{2r}{x} - 1\right)}$ zijnde, vindt men na substitutie der waarden van $\frac{\left(d\frac{x}{y}\right)}{dx}$ en van $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r}{(2r-x)^2} + \frac{r}{x(2r-x)}\cdot\frac{(3r-x)}{2r-x} = \frac{3r^2}{x(2r-x)^2}$$

of

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3r^2y}{x^2(2r-x)^2},$$

welke formule aantoont, dat $\frac{d^2y}{dx^2}$ steeds met y hetzelfde teeken zal hebben, en de kromme dus bestendig de bolle zijde naar de as der abscissen keert (§ 87).

§ 93. Beschouwen wij thans de kromme tot vergelijking hebbende

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

bekend onder den naam van het *Folium* van Descartes, en welker gedaante in *fig.* 26 voorgesteld wordt.

Deze vergelijking van den derden graad zijnde, duidt in de eerste plaats aan, dat er met eenige abscis x drie verschillende ordinaten kunnen overeenstemmen, hetgeen eeniglijk van het al of niet bestaanbaar zijn van de drie wortels der gegevene vergelijking zal afhangen.

Voor negatieve waarden van x gaat de vergelijking over in

$$y^3 + 3axy - x^3 = 0,$$

waaruit, volgens eene bekende eigenschap der hoogere magts-vergelijkingen, terstond op te maken is, dat er met elke negatieve abscis slechts eene enkele positieve ordinaat kan overeenkomen, en de kromme diensvolgens aan die zijde een' oneindig voortloopenden tak zal hebben. Wat den overigen tak betreft, welke zich in de rigting der positieve abscissen uitstrekt, zoo leert ons de vergelijking

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

dat er, voor elke positieve abscis, minstens ééne bestaanbare negatieve ordinaat aan te wijzen is, en de kromme dus ook beneden de as der abscissen tot in het oneindige voortgaat. Of de beide overige ordinaten insgelijks bestaanbaar zullen zijn, hieromtrent zal ons de formule van Cardanus kunnen inlichten. Volgens deze namelijk zijn de drie wortels allen bestaanbaar, zoo lang $\frac{1}{4} x^3 < a^3$ of $x < a\sqrt[3]{4}$ is, waarvan twee alsdan positief zullen zijn, De grens der bestaanbaarheid voor die beide wortels is dus $x = a\sqrt[3]{4}$, en hiermede stemmen overeen $y = a\sqrt[3]{2}$ en $y = -2a\sqrt[3]{2}$, waarmede de punten M en R in de figuur overeenkomen. In het punt M vereenigen zich de beide positieve waarden van y tot eene enkele. Voor $x = 0$, wordt ook $y^3 = 0$, zoodat de kromme tevens door den oorsprong O gaat, alwaar drie waarden van y zullen ineensmelten. Wijders heeft men voor $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$:

Door het differentiëren der gegevene vergelijking, bekomen wij

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

De raaklijn loopt dus evenwijdig aan de as der x in het punt, alwaar $x^2 = ay$ wordt. Uit de combinatie dezer betrekking met de vergelijking der kromme, vindt men voor de coördinaten van dat punt $x = 0$, $y = 0$, en $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$. Er zijn alzoo twee punten, waarin de raaklijn den evenwijdigen stand aanneemt. Het eerste is de oorsprong O, en het andere het punt N.

Voor $y^2 = ax$, wordt $\frac{dy}{dx} = \infty$. Hieraan voldoen $x = 0$, $y = 0$, en $x = a\sqrt[3]{4}$, $y = a\sqrt[3]{2}$. De raaklijn staat dus loodregt op de as der x, zoowel in den oorsprong als in het punt M. Het gedeelte $ONMO$ der kromme, hetwelk een knoop genaamd wordt, blijft alzoo binnen het vierkant op de lijn $OP = a\sqrt[3]{4}$ besloten.

Dat de ordinaat van het punt N alwaar $\frac{dy}{dx} = 0$ is, als maximum beschouwd mag worden, wordt door het teeken van $\frac{d^2y}{dx^2}$ bevestigd. Immers, de voorgaande waarde van $\frac{dy}{dx}$ differentiërende, in de onderstelling van $ay = x^2$, heeft men

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a\frac{dy}{dx} - 2x}{y^2 - ax} = \frac{-2x}{y^2 - ax}.$$

Nu is, volgens de reeds hiervoren gevondene waarden der coördinaten van het punt N, $y^2 > ax$, dus $\frac{d^2y}{dx^2}$ negatief, ten blijke van het bestaan eens maximums.

Men kan eveneens aantoonen, dat de waarde van $y = 0$, een minimum der ordinaten voorstelt. Te dien einde schrijve men de zoo even verkregene uitdrukking voor $\frac{d^2y}{dx^2}$ onder den vorm $\frac{2}{a - \frac{y^2}{x}}$, en omdat voor $x = 0$, en $y = 0$, $\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx} = 0$ is, komt er $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{a}$, zijnde eene positieve waarde.

In het punt M daarentegen kan de ordinaat niet als maximum noch minimum in den tak ONM beschouwd worden, en wel uithoofde $x = a\sqrt[3]{4}$ eene grens voor de bestaanbaarheid der positieve ordinaten oplevert.

Het onderzoek of de kromme eenige assymptoot bezit, is niet moeijelijk.

Uit de vergelijking.

$$\frac{y^3}{x^3} - \frac{3a}{x} \cdot \frac{y}{x} = -1,$$

blijkt dadelijk, dat voor $x = \infty$, $\frac{y}{x}$ tot limiet heeft -1, terwijl

$$y - x\frac{dy}{dx} = y + x = \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} = \frac{3a\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}},$$

tot limiet bekomt $-\frac{3a}{3}$ of $-a$, zoodat er werkelijk een assymptoot UV aanwezig is, tot vergelijking hebbende

$$y + x + a = 0,$$

en de beide negatieve coördinaten assen snijdende in de punten A en B, elk genomen op den afstand a uit den oorsprong.

§ 94. De kromme lijn tot vergelijking hebbende

$$y = a\frac{\sin. x}{x},$$

waarin x alle waarden verkrijgen kan tusschen $-\infty$ en ∞, bestaat blijkbaar uit twee aan elkander gelijke takken, die zich ter wederzijde van de as der y tot in het oneindige uitstrekken.

Men heeft namelijk voor $x = 0$, $\quad y = a$,

$x = \pm\frac{\pi}{2}$, $\quad y = \frac{2a}{\pi}$,

$x = \pm\pi$, $\quad y = 0$,

$x = \pm\frac{3\pi}{2}$, $\quad y = -\frac{2a}{3\pi}$,

$x = \pm 2\pi$, $\quad y = 0$,

enz. enz.

waaruit blijkt, dat elke tak een oneindig aantal malen om de as der x kronkelt, en meer en meer tot die as nadert, gelijk zulks in *fig.* 27 wordt aangewezen. Daar nu voor $x = \infty$, $y = 0$ wordt, en dus $\frac{y}{x}$ nul tot limiet heeft, volgt hieruit tevens de opmerkelijke eigenschap, dat de gemelde as eene assymptoot der kromme is, en tevens door deze in een oneindig aantal punten gesneden wordt

De waarde van het eerste differentiaal-quotient is

$$\frac{dy}{dx} = a\left\{\frac{x\cos. x - \sin. x}{x^2}\right\}.$$

De raaklijn loopt evenwijdig aan de as der x in al die punten welker abscissen wortels zijn der vergel. $x = tg.\,x$. Voor $x = 0$, gaat de waarde van het voorgaande gebroken over in $\frac{0}{0}$. Na differentiatie van teller en noemer, vindt men echter terstond nul voor de gezochte waarde, zoodat de top A mede tot de punten behoort, alwaar de raaklijn de gemelde rigting heeft. De wortels der vergelijking $x = tg.x$, liggen noodzakelijk tusschen π en $\frac{3\pi}{2}$, tusschen 2π en $\frac{5\pi}{2}$ enz., gelijk zulks door de figuur bevestigd wordt.

Differentiërende de waarde van $\frac{dy}{dx}$ in de onderstelling dat deze gelijk nul zij, komt er

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a\,sin.\,x}{x} = -y,$$

ten blijke, dat de ordinaten in de voormelde punten beurtelings maxima en minima zijn.

Uit de gedaante der kromme is reeds het bestaan van buigpunten in elk der deelen, die door de as der abscissen van elkander gescheiden worden, op te merken. De vergelijking.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\left\{\frac{(2-x^2)\,sin.\,x - 2x\,cos.\,x}{x^3}\right\} = 0,$$

welke de daartoe betrekkelijke waarden van x moet doen kennen, toont aan, dat deze de wortels zullen zijn der transcendentale vergel.

$$tg.\,x = \frac{2x}{2-x^2},$$

of
$$x = B.\,tg.\,\frac{2x}{2-x^2}.$$

§ 95. De kromme lijn

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wier loop in *fig.* 28 voorgesteld wordt, levert eenige bijzonderheden op, welke haar onderzoek niet onbelangrijk maken.

Lost men die vergelijking ten aanzien van y op, dan vindt men

$$y = \pm\sqrt{\left\{48a^2 \pm\sqrt{(x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4)}\right\}} \quad . \quad . \quad (2)$$

De kromme wordt blijkbaar door de beide assen in vier symetrieke deelen verdeeld. Zij zal voor eenige waarden van x, vier ordinaten, die twee aan twee van gelijke grootte doch van verschillende teekens zijn, kunnen opleveren. Stelt men $x = 0$, dan volgt uit (1)

$$y^2(y^2 - 96a^2) = 0,$$

gevende $y=0$, en $y=\pm 4a\sqrt{6}$. Op gelijke wijze komt er, door $y=0$ te stellen, $x=0$ en $x=\pm 10a$. Diensvolgens gaat de kromme door den oorsprong; zij snijdt daarenboven de as der x in twee punten G en G' op den afstand $10a$ van den oorsprong, en de as der y in twee punten I en I', op den afstand $4a\sqrt{6}$ van den oorsprong verwijderd.

Schrijft men de waarde van y onder dezen vorm

$$y=\pm\sqrt{\left\{48a^2\pm\sqrt{(x-6a)(x+6a)(x-8a)(x+8a)}\right\}},$$

dan blijkt hieruit:

1°. dat $y=\pm 4a\sqrt{3}$ wordt, zoowel voor $x=\pm 6a$, als voor $x=\pm 8a$, welke abscissen door de lijnen OE, OE', OF, OF' aangeduid worden.

2°. dat van $x=0$ tot $x=\pm 6a$, met elke abscis vier ordinaten, die twee aan twee slechts in teeken verschillen, zullen overeenstemmen.

3°. dat zulks eveneens plaats vindt voor de abscissen, begrepen tusschen $x=\pm 8a$ en $x=\pm 10a$.

4°. dat alle vier ordinaten onbestaanbaar worden, van $x=\pm 6a$ tot $x=\pm 8a$.

5°. dat met $x=\pm 10a$, zoowel $y=0$ als $y=\pm 4a\sqrt{6}$ overeenstemt, waaruit blijkt, dat de punten H, I en L, even als de tegenoverliggende H', I', L', even ver van de as der abscissen verwijderd zijn; en

6°. dat de kromme voor alle waarden van x tusschen $\pm 10a$ en $\pm\infty$, slechts twee bestaanbare ordinaten oplevert, en zich diensvolgens aan beide zijden tot in het oneindige uitstrekt.

Wil men de kromme naauwkeurig met behulp eener schaal door punten construëren, zoo stelle men $a=1$, en berekene vervolgens eene tafel van de onderscheidene waarden van y voor $x=1, 2, 3$, enz.

Om de rigting der raaklijnen in eenige voorname punten te bepalen, differentiëre men de verg. (1), waardoor men verkrijgt

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-50a^2x}{y^3-48a^2y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Hieruit blijkt, dat $\frac{dy}{dx}$ nul wordt, zoo voor $x=0$ als voor $x=5a\sqrt{2}$. De tweede waarde van x kan echter niet in aanmerking komen, dewijl zij y, en dus ook $\frac{dy}{dx}$ onbestaanbaar maakt.

Bepaalt men zich alzoo bij $x=0$, dan heeft men $y=0$ en

$y = \pm 4a\sqrt{6}$. De eerste doet $\frac{dy}{dx}$ overgaan in $\frac{0}{0}$. Om de waarde k van dat gebroken te bekomen, heeft men, na differentiatie van teller en noemer

$$k = \frac{3x^2 - 50a^2}{(3y^2 - 48a^2)k},$$

dus voor $x = 0$, en $y = 0$. $k^2 = \frac{50}{48}$, $k = \pm \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

In het punt 0 snijden dus de raaklijnen de as der abscissen onder hoeken, welker tangenten uitgedrukt worden door $\pm \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$, en alzoo weinig van 45° verschillen, welke ook de grootte der lijn a moge zijn.

De punten I, I', voor welke $y = \pm 4a\sqrt{6}$, zijn alzoo de eenige alwaar de raaklijn evenwijdig aan de as der abscissen gerigt is.

De waarde van $\frac{dy}{dx}$ wordt oneindig, voor $y = 0$, en $y = 4a\sqrt{3}$. Daar echter $x = 0$, en $x = \pm 10a$ met $y = 0$ overeenstemmen, gaat $\frac{dy}{dx}$ in het eerste geval over in $\frac{0}{0}$, en verkrijgt de reeds hiervoren gevondene waarde, zoodat $\frac{dy}{dx}$ eeniglijk voor $y = 4a\sqrt{3}$ en voor $x = \pm 10a$ oneindig kan worden, en met deze eerste waarden stemmen overeen $x = \pm 6a$, en $x = \pm 8a$. Het zijn mitsdien de tien punten $A, A', C, C', G, B, B', D, D', G'$, welker raaklijnen eenen loodregten stand op de as der x bekomen, zoodat het middelste gedeelte der kromme door de raaklijnen AA', BB', begrensd wordt.

Differentiëren wij thans de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 50a^2x}{y^3 - 48a^2y} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

in de onderstelling van $x = 0$, en $y = \pm 4a\sqrt{6}$, dan komt er

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^2 - 50a^2}{y^3 - 48a^2y} = \frac{-50a^2}{y(y^2 - 48a^2)} = -\frac{25}{24y}.$$

Deze uitkomst leert ons, dat de ordinaat in het punt I het eenige positieve maximum, en die in het punt I' het eenige negatieve maximum voorstelt.

Ter bepaling van de assymptoten, heeft men, stellende voor $x = \infty$ en $y = \infty$,

$$\lim.\left(\frac{y}{x}\right) = \lim.\left(\frac{dy}{dx}\right) = p.$$

$$p = \lim.\frac{1}{p}\left(\frac{x^2 - 50a^2}{y^2 - 48a^2}\right) = \frac{1}{p^3},$$

dus $p = \pm 1$.

Wijders heeft men

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{48a^2y^2 - 50a^2x^2}{y^3 - 48a^2y} = \frac{a^2}{y}\frac{\left(48\frac{y^2}{x^2} - 50\right)}{\frac{y^2}{x^2} - 48\frac{a^2}{x^2}},$$

Voor $x = \infty$ en $y = \infty$, wordt

$$\lim.\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Er is derhalve een stelsel assymptoten aanwezig, gaande door den oorsprong, en snijdende de as der abscissen aan beide zijden onder hoeken van $45°$.

Bij het onderzoek naar het bestaan van buigpunten, kunnen wij aldus te werk gaan.

Schrijven wij de verg. (3) onder dezen vorm

$$(y^3 - 48a^2y)\frac{dy}{dx} = x^3 - 50a^2x,$$

en differentiëren wij haar twee achtervolgende malen, dan komt er

$$(y^3 - 48a^2y)\frac{d^2y}{dx^2} + (3y^2 - 48a^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3x^2 - 50a^2 \quad . \; . \; (4)$$

$$(y^3 - 48a^2y)\frac{d^3y}{dx^3} + 3(3y^2 - 48a^2)\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 6x \quad . \; (5)$$

Door het elimineren van $\frac{dy}{dx}$ verandert de eerste dezer vergelijkingen, na $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ gesteld te hebben, in deze

$$(3x^2 - 50a^2)(y^3 - 48a^2y)^2 - (3y^2 - 48a^2)(x^3 - 50a^2x)^2 = 0,$$

welke, met de vergelijking der gegevene kromme gecombineerd, de coördinaten der buigpunten zal doen kennen. Wij zullen echter dat onderzoek, wegens de omslagtigheid der eindvergelijking, niet verder voortzetten, maar ons enkel hierbij bepalen, om aan te toonen, dat de kromme in den oorsprong werkelijk een buigpunt heeft.

Stellen wij namelijk x en y elk $= 0$ in de verg. (4), dan neemt de daaruit afgeleide waarde van $\frac{d^2y}{dx^2}$ den vorm $\frac{0}{0}$ aan. Doch in diezelfde onderstelling herleidt zich de vergel. (5) tot

$$144a^2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

en aangezien $\frac{dy}{dx}$ in den oorsprong $= \sqrt{\frac{50}{48}}$ bevonden is, mogen wij hieruit besluiten, dat in dat punt $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ wordt. Er blijft thans nog overig de waarde van $\frac{d^3y}{dx^3}$ te onderzoeken. Voor $x = 0$, $y = 0$ en $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, geeft de vergel. (5) insgelijks voor $\frac{d^3y}{dx^3}$ den onbepaalden vorm $\frac{0}{0}$. Doch deze laatste in dezelfde onderstellingen differentiërende, vindt men gemakkelijk

$$-192\,a^2 \frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} + 6\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 6,$$

waaruit men eene eindige waarde voor $\frac{d^3y}{dx^3}$ afleidt, ten blijke alzoo dat het punt 0 een buigpunt der kromme is, en deze dus door de raaklijnen van dat punt gesneden wordt. Overigens toont hare symetrieke vorm genoegzaam aan, dat er in elken der twee van elkander gescheiden takken nog twee buigpunten, ter wederzijde van de as der abscissen gelegen, zullen aan te wijzen zijn.

§ 96. De kromme lijn tot vergelijking hebbende

$$y = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2},$$

bestaat (*fig.* 29) uit twee aan elkander gelijke oneindig voortloopende takken, waarvan de een zich boven het positieve deel van de as der x, en de andere zich beneden het negatieve deel dezer as zal uitstrekken, uithoofde x en y gelijktijdig van teeken veranderen. Voor $x = 0$ en $x = \infty$, wordt $y = 0$. De kromme gaat dus door den oorsprong en heeft de as der x tot assymptoot. Het is niet moeijelijk eene meetkunstige constructie aan te wijzen, ter bepaling van de met elke gegeven abscis overeenkomende ordinaat.

Het differentiaal quotient van y opmakende, vindt men

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2}.$$

Stellende hier in $x = 0$, komt er $\frac{dy}{dx} = 1$. De raaklijn Q_1Q in het punt O snijdt dus de as der x onder een hoek van 45^0.

De subtangens PT voor eenig willekeurig punt M, heeft tot waarde

$$y\frac{dx}{dy} = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2} \times \frac{(a^2 + x^2)^2}{a^2(a^2 - x^2)} = \frac{x(a^2 + x^2)}{a^2 - x^2},$$

en kan insgelijks gemakkelijk door constructie bepaald worden.

Voor $x = \infty$ wordt $\frac{dy}{dx} = 0$, zoo als het bestaan der assymptoot vordert. Behalve dien heeft men $\frac{dy}{dx} = 0$, in de punten N en N_1, welke tot de abscissen $x = a$, en $x = -a$ behooren. Aldaar is de ordinaat blijkbaar een maximum, vermits $\frac{dy}{dx}$ voor $x = \pm(a - \delta)$ eene positieve, en voor $x = \pm(a + \delta)$ eene negatieve waarde verkrijgt. Zulks wordt nog bevestigd door x in functie van y uit te drukken. De vergelijking der kromme geeft te dien einde

$$x = \frac{a(a \pm \sqrt{(a^2 - 4y^2)})}{2y}.$$

Hieruit blijkt vooreerst, dat er met dezelfde positieve of negatieve waarde van y, twee verschillende positieve of negatieve waarden van x overeenstemmen. Wijders dat y geene grootere waarde dan $\frac{1}{2}a$ kan hebben, als wanneer $x = a$ wordt.

Uit het tweede differentiaal quotient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 \left\{ \frac{2x}{(a^2 + x^2)^2} + \frac{4x(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^3} \right\},$$

$$= -\frac{2a^2 x(3a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^3},$$

leeren wij dat $\frac{d^2y}{dx^2}$ nul wordt, zoo wel voor $x = 0$, als voor $x = \pm a\sqrt{3}$, en daar $\frac{d^2y}{dx^2}$ te gelijk met x van teeken verandert, volgt hieruit, dat er in den oorsprong een buigpunt bestaat, hetgeen ook reeds uit den stand der raaklijn Q_1Q, ten aanzien van de beide takken der kromme, was op te maken. Wat de tweede waarde van x betreft, zoo blijkt uit de teeken-verandering van $\frac{d^2y}{dx^2}$ voor $x < a\sqrt{3}$ en $x > a\sqrt{3}$, dat de kromme tusschen $x = 0$ en $x = \pm a\sqrt{3}$ de holle zijde, en voor grootere waarden van x, de bolle zijde naar de as keert. Derhalve bestaat er in elken tak nog een tweede buigpunt U overeenkomende met $x = \pm a\sqrt{3}$, hetgeen mede bevestigd kan worden, door het opmaken der waarde van $\frac{d^3y}{dx^3}$, in de onderstelling van $3a^2 - x^2 = 0$.

§ 97. Indien twee takken eener kromme zich snijden of raken, wordt het gemeenschappelijke snij- of raakpunt een *dubbel* punt genaamd. Van dien aard is bijv. het punt O van *fig.* 28. Zijn er drie takken, die in dat geval verkeeren, dan verkrijgt het punt den naam van *drievoudig* punt enz. Het is klaar, dat met de abscis x van zoodanig punt twee of meer gelijke waarden van y zullen

moeten overeenstemmen, zonder dat die abscis eene grens der bestaanbaarheid van y worde; terwijl de waarden van $\frac{dy}{dx}$ mede aan elkander gelijk of verschillende zullen zijn, naar dat de takken zich raken of snijden. De punten O en A der kromme van *fig.* 30, welker vergelijking is

$$y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 6axy^2 - 2ax^3 + 2a^2x^2 = 0.$$

en behoorende tot de abscissen $x = 0$, $x = a$ zijn insgelijks dubbele punten.

Daarentegen is het punt 0 der kromme

$$y^4 + x^4 + 2ay^3 - 2bx^2y = 0,$$

in *fig.* 31 voorgesteld, een drievoudig punt.

Bovendien vertoonen zich bij de beschouwing der kromme lijnen nog enkele punten, welke den naam van *afgezonderde* punten dragen; zijnde de zoodanigen, die niet tot de kromme lijn zelve behooren, doch welker coördinaten aan de gegevene vergelijking tusschen x en y voldoen, ofschoon de betrekking $\frac{dy}{dx}$ voor dat punt onbestaanbaar wordt. Aldus zal de pool A der *conchoide* (*fig.* 32) een afgezonderd punt zijn (*), want stellende

$$AO = a,\quad OB = OB' = b,\quad PM = x,\quad OP = y,$$

dan wordt de vergelijking der kromme

$$y = \left(\frac{a+x}{x}\right) \sqrt{(b^2 - x^2)},$$

en ofschoon nu, in de onderstelling van $b < a$, $x = b$ eene grens is voor de bestaanbaarheid der waarden van y, zullen echter de coördinaten $x = -a$ en $y = 0$, welke die van het punt A zijn, aan de voorgaande vergelijking voldoen. Even zoo zal de oorsprong een afgezonderd punt zijn in de kromme $y = x\sqrt{(x^2 - a^2)}$. Het differentiaal quotient $\frac{dy}{dx}$ zal ook in de eerste kromme onbestaanbaar bevonden worden voor $x = -a$, en in de tweede, voor $x = 0$.

§ 98. Indien in eenige kromme $y = f(x)$, de waarde van y voor $x = a$ plotseling van het bestaanbare tot het onbestaanbare of omgekeerd, overgaat, wordt het punt, tot die abscis behoorende, een *eindpunt* genaamd. In de kromme lijn $y = \frac{1}{l(x)}$ b.v. zal de oorsprong

(*) Deze kromme, welke uit twee verschillende takken bestaat, wordt geconstrueerd door uit eenig punt A, op gegeven afstand der as $Y'Y$ gelegen, lijnen AM te trekken, snijdende die as in R, en vervolgens overal twee gelijke afstanden RM RM' van bepaalde lengte ter wederzijde van het punt R uit te zetten.

een eindpunt zijn, dewijl x niet negatief kan genomen worden zonder y onbestaanbaar te maken; en zulks zal eveneens het geval zijn bij de kromme lijn $y = x\,l(x)$.

De bijzondere punten der kromme lijnen, welke wij onder verschillende benamingen in deze les hebben leeren kennen, worden in het algemeen genoemd *merkwaardige* punten (*points singuliers*), en zulks uithoofde de loop der kromme, onafhankelijk van den aangenomen stand der coördinaten assen, in die punten eenige bijzonderheden vertoont, welke aandacht verdienen.

Ter verdere oefening onderzoeke men thans de navolgende kromme lijnen, welker constructie wij hier als bekend onderstellen.

1°. De *Logistica* of Logarithmische kromme;

2°. De *Quadratrix;*

3°. De Cubische parabool $y^2 = \frac{x^3}{a}$;

4°. De kromme tot vergelijking hebbende

$$y = x\sqrt{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}.$$

DERTIENDE LES.

Beschouwing der kromme lijnen volgens hare poolvergelijking.

§ 99. De theorie in de beide voorgaande lessen ontwikkeld en door voorbeelden toegelicht, had eeniglijk betrekking op het gebruik van een regthoekig coördinaten-stelsel, bij het onderzoek naar de eigenschappen van kromme lijnen. Behandelen wij thans het geval, waarin deze door hare poolvergelijking gegeven zijn. Het is bekend, dat voor sommige kromme lijnen de poolvergelijking een' meer eenvoudigen vorm aanneemt dan die op de regtstandige coördinaten, als wanneer het verkieselijk wordt hare eigenschappen met behulp van het polaire coördinaten-stelsel op te sporen.

Zij dan $z = f(\varphi)$ of $F(z, \varphi) = 0$ de poolvergelijking voor eenige kromme AM (*fig.* 33), waarin P den pool, $MP = z$ den voerstraal van eenig punt M, en φ den hoek MPX voorstelt, welke deze lijn met eene door den pool getrokken onveranderlijke as PX vormt. De stand der raaklijn MT ten opzigte van den voerstraal MP laat zich gemakkelijk door de navolgende beschouwing uit de figuur bepalen. Zij M' een punt op een' oneindig kleinen afstand van M genomen, dan is de hoek $MPM' = d\varphi$ en $M'P = z + dz$. Trekkende nu uit P met PM als straal het cirkel-boogje $Mm = zd\varphi$, dan is $M'm = dz$. Zij ψ de hoek PMQ tusschen den voerstraal en de raaklijn begrepen. In het driehoekje $MM'm$, hetwelk als regthoekig in m beschouwd mag worden, heeft men $dz = zd\varphi \times tg\ mMM'$. Maar deze laatste hoek voor het complement van den hoek ψ kunnende genomen worden, zoo volgt hieruit

$$dz = zd\varphi \times cot.\ \psi, \qquad \text{of} \qquad tg\psi = \frac{zd\varphi}{dz}, \quad . \ . \ . \ (1)$$

welke vergelijking dienen kan, om de rigting der raaklijnen te bepalen.

De hoek ψ zal altijd scherp wezen, zoo lang dz en $d\varphi$ met hetzelfde teeken aangedaan zijn, en dus de voerstraal z te gelijk met den hoek φ toeneemt, hetgeen in de figuur aangenomen is. In het

tegenovergestelde geval verkrijgt $tg\psi$ eene negatieve waarde, waardoor de hoek ψ stomp wordt. (Zie *fig.* 34.)

De form. (1) laat zich ook, ofschoon op eene minder eenvoudige wijze, aldus bewijzen. Noemende φ' den hoek MQX tusschen de raaklijn en de as der hoeken PX, zoo is

$$\psi = \varphi' - \varphi \quad \text{dus } tg\psi = \frac{tg\varphi' - tg\varphi}{1 + tg\varphi' tg\varphi} = \frac{\frac{dy}{dx} - tg\varphi}{1 + \frac{dy}{dx} tg\varphi}$$

$$= \frac{\cos.\varphi dy - \sin.\varphi dx}{\cos.\varphi dx + \sin.\varphi dy}.$$

Schrijvende nu hierin voor dx en dy de in § 76 voorkomende waarden in functie van de coördinaten z, φ en hare differentialen, te weten

$$dx = \cos.\varphi dz - z \sin.\varphi d\varphi,$$
$$dy = \sin.\varphi dz + z \cos.\varphi d\varphi,$$

dan zal men voor $tg\psi$ dezelfde formule als voren terugvinden.

Wijders volgt nog uit deze laatste

$$\sin.\psi = \frac{zd\varphi}{\sqrt{(z^2 d\varphi^2 + dz^2)}} = \frac{z}{\sqrt{\left(z^2 + \frac{dz^2}{d\varphi^2}\right)}},$$

$$\cos.\psi = \frac{dz}{\sqrt{(z^2 d\varphi^2 + dz^2)}} = \frac{\frac{dz}{d\varphi}}{\sqrt{\left(z^2 + \frac{dz^2}{d\varphi^2}\right)}}.$$

Men stelle den boog $AM = s$, dan volgt uit het regthoekige driehoekje $MM'm$, wanneer men de koorde MM' door het boogje ds vervangt (§ 83),

$$ds^2 = z^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

of

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(z^2 + \frac{dz^2}{d\varphi^2}\right)},$$

en hierdoor gaan de waarden van $\sin.\psi$ en $\cos.\psi$ over in deze meer eenvoudige,

$$\sin.\psi = z\frac{d\varphi}{ds}, \qquad \cos.\psi = \frac{dz}{ds},$$

welke ook regtstreeks uit de beschouwing der figuur waren af te leiden. De voorgaande waarde van ds^2 had insgelijks kunnen opgemaakt worden uit die voor de regtstandige coördinaten

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

wanneer men namelijk hierin voor dx en dy hunne hiervoren opgegevene uitdrukkingen in functiën van x en φ substitueert. (*)

§ 100. Zij MR de normaal van het punt M en RT de loodlijn RT op den voerstraal, elkander in R snijdende, en voorts PN loodregt op de raaklijn getrokken. Men zal thans voor de lengten der in de figuur getrokken lijnen, die met de rigting der raaklijn in verband staan, gemakkelijk de navolgende waarden bekomen.

Raaklijn $\quad MT = z\,sec.\,\psi = z\sqrt{\left(\left(\frac{zd\varphi}{dz}\right)^2 + 1\right)} = z\,\frac{ds}{dz}.$

Subtangens $\quad PT = z\,tg\psi = z^2\frac{d\varphi}{dz}.$

Normaal $\quad MR = z\,cosec.\,\psi = \sqrt{\left(z^2 + \frac{dz^2}{d\varphi^2}\right)} = \frac{ds}{d\varphi}.$

Subnormaal $\quad PR = z\,cot.\,\psi = \frac{dz}{d\varphi}.$

Loodlijn $\quad PN = z\,sin.\,\psi = \dfrac{z^2}{\sqrt{\left(z^2 + \frac{dz^2}{d\varphi^2}\right)}} = z^2\frac{d\varphi}{ds}.$

Van al deze lijnen heeft de subnormaal PR de eenvoudigste uitdrukking, zoodat het in vele gevallen verkieselijk zal zijn zich van deze laatste tot het trekken der raaklijnen te bedienen. Men kan hieruit onder anderen terstond opmaken, dat voor alle kromme lijnen begrepen in de vergelijking

$$z = a\varphi + b,$$

waaronder tevens de spiraal van Archimedes behoort, de subnormaal eene standvastige waarde verkrijgt.

(*) Deze bewerking kan het gemakkelijkst geschieden door gebruik te maken van de navolgende betrekkingen tusschen de regtstandige en de polaire coördinaten, te weten

$$ze^{\varphi\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}, \qquad ze^{-\varphi\sqrt{-1}} = x - y\sqrt{-1}.$$

Elk derzelve differentiërende, komt er

$$e^{\varphi\sqrt{-1}}\left(dz + zd\varphi\sqrt{-1}\right) = dx + dy\sqrt{-1},$$

$$e^{-\varphi\sqrt{-1}}\left(dz - zd\varphi\sqrt{-1}\right) = dx - dy\sqrt{-1},$$

waaruit, na vermenigvuldiging dezer beide vergelijkingen, onmiddellijk volgt

$$dz^2 + z^2d\varphi^2 = dx^2 + dy^2 = ds^2.$$

In *fig.* 34, alwaar dz en $d\varphi$ van tegengestelde teekens zijn, zullen ook de lijnen PR en PT van teekens veranderen, en eenen tegenovergestelden stand aannemen.

Indien er eene assymptoot aanwezig is, moet de voerstraal z voor eene eindige waarde van φ oneindig worden. Deze voorwaarde is echter niet voldoende. De assymptoot moet daarenboven op eenen eindigen afstand van den pool verwijderd zijn, of hetgeen hetzelfde is, de loodlijn PN moet, voor toenemende waarden van z, tot eene zekere limiet naderen. Voor de waarde dezer loodlijn is hiervoren gevonden,

$$\frac{z^2}{\sqrt{\left(z^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2\right)}}=\frac{z^2\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(z^2\frac{d\varphi^2}{dz^2}+1\right)}}.$$

Daar nu bij het evenwijdig worden van de raaklijn met den voerstraal, de hoek ψ en dus ook $z\frac{d\varphi}{dz}$ verdwijnt, herleidt zich de voorgaande waarde der loodlijn tot $z^2\frac{d\varphi}{dz}$, zijnde de lengte van den subtangens PT, hetwelk ook uit de figuur was op te maken, dewijl de oneindige voerstraal alsdan eene rigting bekomt loodregt op PN.

Het onderzoek naar het bestaan van assymptoten komt derhalve hierop neder.

Na de waarde van φ bepaald te hebben, waarbij z oneindig groot wordt, substituere men die in de waarde van den subtangens $z^2\frac{d\varphi}{dz}$, en onderzoeke vervolgens of deze lengte voor $z=\infty$ eene limiet toelaat. Bekomt men hierbij eene eindige uitkomst, dan mag men tot het bestaan eener assymptoot besluiten. Vindt men voor deze limiet nul, dan is de oneindige voerstraal zelf de assymptoot.

§ 101. Wij zullen thans eenige voorbeelden ter toepassing laten volgen.

1.° De spiraal van ARCHIMEDES $z=a\varphi$ of $z=\frac{r\varphi}{2\pi}$, indien r de lengte van den (*fig.* 35) voerstraal voorstelt, nadat de hoek φ, 360° doorgeloopen heeft. Hier is

$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{r}{2\pi}\text{ dus } z\frac{d\varphi}{dz}=\varphi=tg\psi.$$

De tangens van den hoek tusschen den voerstraal en de raaklijn blijkt derhalve overal gelijk aan de lengte van den boog φ voor den straal 1 te zijn. De subnormaal heeft daarentegen voor elk punt

der kromme eene standvastige waarde, gelijk reeds in de vorige § is opgemerkt.

De as der hoeken is tevens raaklijn in den oorsprong. Bij toenemende waarden van φ verkrijgt de raaklijn meer en meer eene rigting loodregt op den voerstraal.

Voor assymptoten is deze kromme niet vatbaar, dewijl z en φ gelijktijdig in het oneindige toenemen.

2.° De logarithmische spiraal $z = a^{\varphi}$, (*fig.* 36)

$$\frac{dz}{d\varphi} = a^{\varphi} l(a) = z l(a) \quad . \quad \frac{z d\varphi}{dz} = \frac{1}{l(a)}.$$

De raaklijn en de voerstraal vormen dus overal denzelfden hoek met elkander, terwijl de subtangenten, normalen enz. evenredig aan den voerstraal toenemen. Ook hier zal evenmin eene assymptoot kunnen aanwezig zijn.

3.° De hyperbolische spiraal $z\varphi = a$, (*fig.* 37)

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\frac{a}{\varphi^2} = -\frac{z^2}{a}, \quad \frac{z d\varphi}{dz} = -\frac{a}{z} = -\varphi.$$

Voor toenemende waarden van z, nadert de hoek ψ meer en meer tot 180°, en voor toenemende waarden van φ, verkrijgt de raaklijn eene rigting minder en minder afwijkende van de loodlijn op den voerstraal.

Daar nu voor $\varphi = 0$, $z = \infty$, en $\frac{z^2 d\varphi}{dz} = -a$ wordt voor alle punten der kromme, blijkt hieruit vooreerst, dat de subnormaal, even als bij de spiraal van ARCHIMEDES, overal van standvastige lengte is, en ten tweede, dat de kromme eene assymptoot NN' heeft, evenwijdig aan de as der x op eenen afstand a uit de pool.

4.° De ellips en hyperbool

$$z = \frac{b^2}{a + e \cos. \varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{e}{a} \cos. \varphi} = \frac{p}{1 + k \cos. \varphi}.$$

Voor de ellips is $k < 1$, en voor de hyperbool $k > 1$; zijnde hierbij de pool in een der brandpunten genomen.

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{pk \sin. \varphi}{(1 + k \cos. \varphi)^2} = \frac{kz^2 \sin. \varphi}{p},$$

$$tg\psi = \frac{z d\varphi}{dz} = \frac{p}{kz \sin. \varphi}, \quad \frac{z^2 d\varphi}{dz} = \frac{p}{k \sin. \varphi}.$$

Voor $\varphi = 0$ en $\varphi = \pi$, wordt $\psi = 90^\circ$. Voor $cos.\ \varphi = -\frac{1}{k} = -\frac{a}{e}$, wordt z in de hyperbool oneindig groot, en

$$\frac{z^2 d\varphi}{dz} = \frac{p}{\sqrt{(k^2-1)}} = \frac{b^2}{a} \times \sqrt{(\frac{a^2}{e^2-a^2})} = b,$$

ten blijke, dat elke tak dezer kromme eene assymptoot heeft, snijdende de eerste as onder eenen scherpen hoek, tot cosinus hebbende $\frac{a}{e}$, en gelegen op eenen afstand b uit de pool, hetwelk met de bekende eigenschap der hyperbool overeenstemt.

Het is gemakkelijk te bewijzen, dat de raaklijn in eenig punt der ellips of hyperbool met elk der naar de beide brandpunten getrokken voerstralen gelijke hoeken maakt. Immers, noemende z', φ' de polaire coördinaten voor eenig punt der ellips, indien de pool naar het andere brandpunt overgebragt wordt, dan verandert de poolvergelijking in

$$z' = \frac{b^2}{a - e\ cos.\ \varphi'} = \frac{p}{1 - k\ cos.\ \varphi'},$$

dus $\frac{z'd\varphi'}{dz'} = -\frac{p}{kz'\ sin.\ \varphi'}$. Maar $z'\ sin.\ \varphi' = z\ sin.\ \varphi$ zijnde, zoo volgt hieruit $\frac{z'd\varphi'}{dz'} = -\frac{zd\varphi}{dz}$. De hoeken ψ van verschillende zijden der raaklijn geteld, zijn dus even groot. Bij de hyperbool daarentegen zal men hebben

$$z' = \frac{b^2}{a + e\ cos.\ \varphi'},$$

dus $\frac{z'd\varphi'}{dz'} = \frac{zd\varphi}{dz}$, zoodat de raaklijn den hoek tusschen de twee voerstralen begrepen midden door deelt.

§ 102. Het kenmerk voor het bestaan van buigpunten is onder anderen af te leiden uit de reeds in § 88 aangevoerde eigenschap, dat de hoek tusschen de raaklijn en de as der abscissen begrepen, in een buigpunt der kromme steeds een maximum of minimum wordt. Stellende alzoo dezen hoek $= \omega$, dan is $\omega = \varphi + \psi$ en dus $\frac{d\omega}{d\varphi} = 1 + \frac{d\psi}{d\varphi}$, waarbij de hoeken ω en ψ als functiën van den hoek φ worden beschouwd.

De voorwaarden tot het bestaan van eenig buigpunt zijn derhalve deze:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = 0, \text{ of } \frac{d\psi}{d\varphi} = -1, \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} \text{ positief of negatief.}$$

Wij kunnen die kenmerken nog op eene andere wijze uitdrukken, door namelijk de coördinaten z, φ en hare differentialen hierbij in rekening te brengen.

Te dien einde heeft men

$$\psi = B\,tg\,\frac{z d\varphi}{dz}.$$

Derhalve $$d\psi = \frac{d\left(\frac{z d\varphi}{dz}\right)}{1 + \frac{z^2 d\varphi^2}{dz^2}} = \left(\frac{dz^2 - z d^2 z}{ds^2}\right) d\varphi,$$

en $$\frac{d\omega}{d\varphi} = 1 + \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{ds^2 + dz^2 - z d^2 z}{ds^2} = \frac{z^2 d\varphi^2 + 2dz^2 - z d^2 z}{ds^2}.$$

Als voorwaarde tot het bestaan van buigpunten wordt dus gevorderd, dat

$$\frac{ds^2 + dz^2 - z d^2 z}{ds^2} = 0,$$

of wel, dat $$z^2 + \frac{2dz^2}{d\varphi^2} - \frac{z d^2 z}{d\varphi^2} = 0 \text{ zij} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Differentiërende thans de vergelijking

$$\left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi}\right)\frac{ds^2}{d\varphi^2} = z^2 + \frac{2dz^2}{d\varphi^2} - \frac{z d^2 z}{d\varphi^2},$$

in de onderstelling van $\frac{d\psi}{d\varphi} = -1$, dan komt er

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} \cdot \frac{ds^2}{d\varphi^2} = 2z\frac{dz}{d\varphi} + \frac{3dz}{d\varphi}\frac{d^2 z}{d\varphi^2} - \frac{z d^3 z}{d\varphi^3} \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Daar nu de factor $\frac{ds}{d\varphi}$ niet nul worden kan, besluiten wij hieruit dat al de waarden van z of φ, die aan de vergelijking (1) voldoen, en tevens aan het tweede lid der verg. (2) eene positieve of negatieve waarde geven, zoo vele buigpunten der kromme zullen doen kennen. In de meeste gevallen zal men zich echter van het bestaan eens buigpunts gemakkelijk kunnen verzekeren, door na te gaan of de waarde van het voorste lid der vergel. (1) van teeken verandert voor de coördinaten van twee, in de nabijheid van het onderstelde buigpunt, genomen punten.

De zoo even gevonden uitkomsten laten zich nog onder eenen meer eenvoudigen vorm schrijven, door het invoeren der lengte λ van de loodlijn uit de pool op de raaklijn getrokken.

Wij hebben namelijk, volgens § 100

$$\lambda = \frac{z^2 d\varphi}{ds} = z \sin.\psi,$$

dus $$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{dz}{d\varphi} sin.\,\psi + z\,cos.\,\psi\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{dz}{d\varphi} \cdot \frac{zd\varphi}{ds} + z\frac{dz}{ds}\frac{d\psi}{d\varphi},$$

of $$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{zdz}{ds}\left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi}\right) = \frac{zdz}{ds} \cdot \frac{d\omega}{d\varphi},$$

$$\text{en } \frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} = z\,\frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}, \text{ voor } \frac{d\psi}{d\varphi} = -1,$$

Derhalve heeft men tot voorwaarden voor het bestaan van eenig buigpunt

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{d.\left(\frac{z^2 d\varphi}{ds}\right)}{d\varphi} = 0,$$

zonder dat $\frac{d^2\lambda}{d\varphi^2}$ nul zij, mits $z\frac{dz}{ds} = z\,cos\psi$ hierbij geene oneindige waarde bekome.

§ 103. Men kan nu uit het voorgaande gemakkelijk het kenmerk afleiden, ter beoordeeling of eenig gedeelte eener kromme, de holle of de bolle zijde naar de pool keert. Immers blijkt genoegzaam uit de inzage der figuren 38 en 39, dat het eerste of tweede geval zal plaats vinden, naar dat de hoek $MTX = \varphi + \psi$ voor toenemende waarden van φ, aangroeit of afneemt, en dus een positief of negatief differentiaal quotient ten opzigte van φ oplevert. Daar nu

$$1 + \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\lambda}{d\varphi} \cdot \frac{ds}{zdz} = \frac{d\lambda}{dz} \cdot \frac{1}{sin\psi.} \text{ is,}$$

en $sin.\psi$ niet negatief worden kan, zal het positief of negatief zijn van $\frac{d\lambda}{dz}$, of van de uitdrukking

$$z^2 + 2\,\frac{dz^2}{d\varphi^2} - z\frac{d^2z}{d\varphi^2},$$

aanduiden of de holle dan wel de bolle zijde naar de pool gekeerd is.

Het buigpunt een punt der kromme zijnde waarin eene teekenverandering van $\frac{d\lambda}{dz}$ plaats vindt, volgt hieruit, dat in zoodanig punt, $\frac{d\lambda}{dz}$ soms oneindig groot in plaats van nul kan worden, hetgeen dan ook evenzeer geldt van het keerpunt der eerste soort. Dit laatste punt onderscheidt zich echter van het buigpunt hierin, dat het keerpunt tevens de vereeniging is van twee verschillende takken der kromme, en de hoek φ eene grens voor de bestaanbaarheid der voerstralen kan worden (§ 91).

Het is ook mogelijk dat $\frac{d\varpi}{d\varphi}$ of $1+\frac{d\psi}{d\varphi}$ voor eenig punt nul worde, zonder het aanwezig zijn van een buigpunt. Alsdan moet insgelijks $\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}$ nul worden. Om in zoodanig geval te beoordeelen hoedanig het met de kromme in dat punt gesteld zij, zou men kunnen onderzoeken of de hoek ω, voor eene oneindige kleine vermeerdering van φ, eene vermeerdering of vermindering ondergaat. Men zal echter, even als in § 89, zonder moeite, tot het besluit komen, dat, indien er een even aantal differentiaal-quotienten verdwijnen, het daarop volgende $\frac{d^{2n+1}\psi}{d\varphi^{2n+1}}$ van eene onevene orde, eene positieve of negatieve waarde moet verkrijgen, naar dat de kromme in het punt (z, φ) de holle of bolle zijde naar de pool keert.

De vergel. (1) aldus geschreven,

$$z^2+2\frac{dz^2}{d\varphi^2}=z\frac{d^2z}{d\varphi^2};$$

leidt onmiddelijk tot de gevolgtrekking, dat geene kromme, waarin $\frac{d^2z}{d\varphi^2}$ nul wordt, of met z in teeken verschilt, voor buigpunten vatbaar is. De kromme lijnen, welker vergelijkingen begrepen zijn in een' dezer vormen,

$$z=a\varphi+b. \qquad z=a\sin\varphi+b,$$

verkeeren dus in dat geval.

Dezelfde vergel. (1) laat zich tevens door eene andere vervangen, welke voor enkele kromme lijnen gemakkelijker in de toepassing wordt. Men stelle namelijk $z=\frac{1}{z'}$ of $\frac{1}{z}=z'$, dan is eerstelijk

$$-\frac{1}{z^2}.\frac{dz}{d\varphi}=\frac{dz'}{d\varphi},$$

Eene tweede differentiatie geeft,

$$\frac{2}{z^3}\frac{dz^2}{d\varphi^2}-\frac{1}{z^2}.\frac{d^2z}{d\varphi^2}=\frac{d^2z'}{d\varphi^2},$$

dus

$$2\frac{dz^2}{d\varphi^2}-z\frac{d^2z}{d\varphi^2}=\frac{1}{z'^3}.\frac{d^2z'}{d\varphi^2},$$

zoodat men tot voorwaarde van het buigpunt verkrijgt,

$$\frac{1}{z'^3}\left(z'+\frac{d^2z'}{d\varphi^2}\right)=0,$$

of wel

$$\frac{d^2z'}{d\varphi^2}=-z'.$$

Er kan alzoo geen buigpunt bestaan, indien z' en $\frac{d^2z'}{d\varphi^2}$ met het zelfde teeken aangedaan zijn.

Overigens volgt uit het voorgaande, dat de kromme hare holle of bolle zijde naar de pool zal keeren, naar dat

$$z' + \frac{d^2z'}{d\varphi^2} > \text{ of } < 0 \text{ is,}$$

z' hierbij steeds positief ondersteld zijnde.

§ 104. Zie hier thans enkele toepassingen.

1° *Voorbeeld.* De logarithmische spiraal

$$z = a^\varphi,$$

Deze vergelijking geeft,

$$z' = a^{-\varphi},$$

$$\frac{dz'}{d\varphi} = -z'l(a). \quad \frac{d^2z'}{d\varphi^2} = z'l^2(a),$$

dus

$$z' + \frac{d^2z'}{d\varphi^2} = z'\left(1 + l^2(a)\right),$$

ten blijke, dat er nergens een buigpunt aanwezig, en de kromme steeds met hare holle zijde naar de pool gekeerd is.

2° *Voorbeeld.* De kegelsneden begrepen in de vergelijking.

$$z = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi}.$$

Men heeft achtervolgens

$$z' = \frac{a + e\cos\varphi}{b^2},$$

$$\frac{dz'}{d\varphi} = \frac{-e\sin.\varphi}{b^2}. \quad \frac{d^2z'}{d\varphi^2} = \frac{-e\cos.\varphi}{b^2},$$

$$z' + \frac{d^2z'}{d\varphi^2} = \frac{a}{b^2} \text{ positief.}$$

Elke der kegelsneden vertoont alzoo steeds de holle zijde naar de pool.

3° *Voorbeeld.* De gewone *Epicycloide*

$$z = 2r(1 - \cos.\varphi),$$

geeft

$$\frac{dz}{d\varphi} = 2r\sin.\varphi. \quad \frac{d^2z}{d\varphi^2} = 2r\cos.\varphi.$$

dus $$z^2+2\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2-z\frac{d^2z}{d\varphi^2}=12r^2(1-\cos.\varphi),$$

Ofschoon deze uitdrukking voor $\varphi=0$ verdwijnt, kan hier evenwel geen buigpunt aanwezig zijn, dewijl $1-\cos.\varphi$ voor $\varphi=\pm\delta$ het positieve teeken behoudt, zoodat de beide takken der kromme met de holle zijde naar de as gekeerd zijn.

4° *Voorbeeld.* De *Conchoide*

$$z=a\sec.\varphi\pm b,$$

waarin het positieve teeken voor den bovensten en het negatieve voor den benedensten tak geldt; zijnde hierin de lijn AB (*fig.* 32) tot as der hoeken genomen.

Deze vergelijking differentiërende, komt er

$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{a\sin.\varphi}{\cos.^2\varphi},$$

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2}=a\left\{\frac{\cos.^3\varphi+2\cos.\varphi\sin.^2\varphi}{\cos.^4\varphi}\right\}=a\left(\frac{1+\sin.^2\varphi}{\cos.^3\varphi}\right),$$

waardoor de verg. (1), na kortheidshalve $\frac{b}{a}=m$ gesteld te hebben, overgaat in

$$\left(\frac{1\pm m\cos.\varphi}{\cos.\varphi}\right)^2+2\frac{\sin.^2\varphi}{\cos.^4\varphi}-\left(\frac{1\pm m\cos.\varphi}{\cos.\varphi}\right)\left(\frac{1+\sin.^2\varphi}{\cos.^3\varphi}\right)=0.$$

Deze herleidt zich met weinig moeite tot de meer eenvoudige vergelijking

$$3\cos.^2\varphi\pm m\cos.^3\varphi-2=0,$$

en hierin nog stellende

$$t=1\pm m\cos.\varphi,$$

komt er voor de eind-vergelijking, welke over het al of niet bestaan van buigpunten moet doen beslissen,

$$t^3-3t+2(1-m^2)=0.$$

Zoo als bekend is, heeft men bij de *conchoide* drie gevallen te onderscheiden, namelijk

1.° $a>b$ of $m<1$, 2.° $a=b$ of $m=1$, 3.° $a<b$ of $m>1$,

welke afzonderlijk in de figuren 32^a, 32^b, 32^c voorgesteld worden.

Volgens den regel van Cardanus, zal de vergelijking in t alleen dan drie bestaanbare wortels kunnen opleveren, bijaldien

$$(1-m^2)^2<1 \text{ of } m<\sqrt{2} \text{ is.}$$

In het eerste geval ($m<1$) heeft dus de eind-vergelijking in t drie

bestaanbare wortels, waaronder twee positieve en een negatieve. Uit die vergelijking laat zich mede opmaken, dat de kleinste der positieve wortels tusschen 0 en 1, en de grootste tusschen 1 en 2 ligt. Voor den bovensten tak der kromme kan de negatieve wortel, evenmin als de kleinste positieve in aanmerking komen, dewijl $cos.\ \varphi$ eene positieve waarde moet behouden.

Wat den benedensten tak betreft, daar $t = 1 - m\ cos.\ \varphi$, noch negatief noch > 1 kan worden, zoo zal hier de kleinste positieve wortel alleen kunnen gelden. Alzoo blijkt uit het voorgaande, dat in het geval van $a < b$, elk der beide takken ter wederzijde van de as der hoeken gelegen, slechts een enkel buigpunt kan vertoonen.

In het tweede geval ($m = 1$), heeft men $t = 0$ en $t = \pm\sqrt{3}$; dus voor den bovensten tak $cos.\ \varphi = -1$, $cos.\ \varphi = -1 \pm \sqrt{3}$, en voor den benedensten $cos.\ \varphi = 1$, $cos.\ \varphi = 1 \pm \sqrt{3}$. Daar nu $cos.\ \varphi$ noch negatief noch > 1 kan zijn, volgt hieruit, dat er alleen in den bovensten tak een buigpunt ter wederzijde van de as der hoeken zal aanwezig zijn, terwijl in den benedensten tak $\varphi = 0$ een keerpunt aanduidt.

In het derde geval ($m > 1$), zal de vergelijking minstens één' bestaanbaren positieven wortel hebben. De beide overige zullen elk, zoo zij bestaanbaar zijn, volgens den regel der teekens, negatieve waarden verkrijgen. Voor den bovensten tak echter kan geen dezer negatieve wortels in aanmerking komen, uit hoofde $cos.\ \varphi$ alsdan insgelijks negatief zou moeten worden. Wat den benedensten tak betreft, voor welke $t = 1 - m\ cos.\ \varphi$ is, merke men op dat de positieve wortel, tusschen 1 en 2 invallende, hier moet vervallen, dewijl $cos.\ \varphi$ steeds positief zijnde, t niet > 1 kan worden. Zijn nu de beide overige negatieve wortels bestaanbaar, dan kan men zich op de volgende wijze spoedig verzekeren, of zij al dan niet voor φ eene bruikbare waarde zullen opleveren. Vervangt men namelijk t door $-t'$, ten einde die wortels positief te maken, zoo verandert de eind-vergelijking in

$$t'^3 - 3t' + 2(m^2 - 1) = 0,$$

waaruit volgt

$$t' > \frac{2}{3}(m^2 - 1).$$

Maar $t' = m\ cos.\ \varphi - 1$ zijnde, heeft men

$$m\ cos.\ \varphi > 1 + \frac{2}{3}(m^2 - 1) \text{ of } > \frac{1 + 2m^2}{3},$$

dus $$cos.\,\varphi > \frac{2m^2+1}{3m}.$$

Daar nu m tusschen 1 en $\sqrt{2}$ invalt, stelle men $m = 1 + \delta$, waardoor $cos.\,\varphi > \frac{3+4\delta+2\delta^2}{3+3\delta} > 1$ wordt, hetgeen derhalve aanduidt, dat ook elk der beide negatieve waarden van t te verwerpen is, en er mitsdien in het geval van $a < b$, in den benedensten tak geen enkel buigpunt, doch in den bovensten wederom een buigpunt ter wederzijde van de as der hoeken zal aanwezig zijn, zoo als zulks dan ook in elk der drie gestelde gevallen, uit de gedaante der kromme van zelf op te maken is. Behalve dien wordt het bestaan der gevonden buigpunten buiten twijfel gesteld, door op te merken, dat indien de wortels der eind-vergelijking in t, en dus ook de hoek φ eene kleine positieve en negatieve aangroeijing ondergaat, het voorste lid dezer vergelijking alsdan van teeken zal veranderen (§ 102).

Men oefene zich nog in het onderzoek der kromme lijnen tot poolvergelijkingen hebbende,

1.° $z = a\,sin.\,\varphi + b\,cos.\,\varphi$,

2.° $z = a\,tg\varphi$.

3.° $z = a\,\frac{cos.\,(a+2\varphi)}{sin.\,\varphi}$.

VEERTIENDE LES.

Over de kromming der kromme lijnen. Bepaling van den kromtestraal en van het middelpunt des kromtecirkels. Theorie der ontwondenen.

§ 105. Eene kromme lijn onderscheidt zich van eene regte hierin, dat hare zamenstellende deelen of elementen aanhoudend van rigting veranderen, terwijl daarentegen de regte lijn, hoe ver ook uitgestrekt, hare aanvankelijke rigting onveranderd behoudt. De kromming of afwijking van de regte rigting zal dus, voor een bepaald gedeelte eener kromme, des te sterker zijn, naarmate het laatste element van den boog een' grooteren hoek met het eerste maakt, en de kromme alzoo meer van hare aanvankelijke rigting afgeweken is.

Beschouwen wij, om zulks nader toe te lichten, twee kromme lijnen AM, AM' (*fig.* 40), van gelijke lengte, en in het punt A eene gemeenschappelijke raaklijn AN hebbende, welke de rigting in het aanvangspunt A der beide krommen aanduidt. De raaklijnen aan de punten M,M' getrokken, maken blijkbaar hoeken van ongelijke grootte met de raaklijn van het punt A. Voor de eerste dezer kromme wordt de afwijking van de regtlijnige rigting aangewezen door den hoek MQN, en voor de tweede, door den hoek $M'Q'N$. Men zegt uit dien hoofde, dat de eerste over dezelfde lengte eene mindere kromte vertoont dan de laatste. Is eene derzelve bijv. AM' een cirkelboog, dan zal voor elke lengte des boogs, de verhouding tusschen dezen en de grootte van den afwijkingshoek eene standvastige waarde bekomen, of, hetgeen hetzelfde beteekent, voor elken boog, gelijk aan de aangenomene lengte-eenheid, zal de afwijkingshoek even groot zijn. Immers, trekkende de beide stralen AO, $M'O$, dan is de hoek $NQ'M'$, gelijk aan dien, welke tusschen deze stralen begrepen is. Daar nu de boog AM' evenredig is aan den hoek AOM', zoo heeft men, R den straal des cirkels noemende,

$$AM' = R \times \text{hoek}\, AO'M',$$

dus

$$\frac{\text{hoek}\, AO'M'}{\text{boog}\, AM'} = \frac{1}{R}.$$

De cirkel is alzoo eene lijn van standvastige kromte, en deze zal des te grooter zijn, naarmate de straal kleiner wordt.

Zij wederom ω de hoek, tusschen de raaklijn van eenig punt (x, y) en de as der abscissen begrepen, dan zal $\omega + \Delta\omega$ dezen hoek voorstellen, wanneer men tot het punt $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ overgaat, en dus $\Delta\omega$ de grootte van den hoek tusschen de raaklijnen aan die beide punten begrepen. Voor den cirkel heeft men derhalve

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

Bij elke andere kromme lijn zal de verhouding $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ voor eenigen boog s eene veranderlijke waarde verkrijgen, afhankelijk van die, welke men aan de aangroeijing Δs toekent, en deze verhouding zal meer en meer tot hare limiet $\frac{d\omega}{ds}$ naderen, naarmate men den boog Δs kleiner neemt. Wij kunnen deze limiet voor elk punt eener kromme lijn beschouwen als de maat der kromte in het element ds tot dat punt behoorende, en zullen hierdoor in staat zijn de veranderingen in de kromte der opvolgende elementen, nategaan.

Verbeelden wij ons te dien einde een' cirkel, welks straal R tot waarde heeft, de omgekeerde verhouding $\frac{ds}{d\omega}$, dan zal de kromte van zoodanigen cirkel overeenkomen met die van het element ds der kromme. De kromten in de opvolgende elementen laten zich thans vergelijken bij die van cirkels met veranderlijke stralen beschreven, en daarenboven tegen de kromme lijn zoodanig geplaatst, dat zij in de overeenkomstige punten eene gemeenschappelijke raaklijn hebben, en tevens hare holle zijden naar denzelfden kant keeren. Elk dezer cirkels heet alsdan de *kromte-cirkel* (*cercle de courbure*) in het aanrakings-punt, en zijn middelpunt ligt noodzakelijk op de normaal, gaande door dat punt.

§ 106. Trekken wij de normalen in de punten M, M' eener kromme AM' (*fig.* 41), zich snijdende in het punt O, dan zullen de lijnen MO, $M'O$, des te minder van elkander verschillen, naarmate de punten M, M' digter bij elkander liggen. Beide lijnen zullen tot eene zekere limiet naderen, welke juist met den straal des kromte-cirkels van het punt M zal overeenstemmen. Om zulks te betoogen, heeft men in den driehoek $M'MO$, de evenredigheid

$$MM' : MO = \sin. MOM' : \sin. MM'O,$$

of $$\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} : MO = \sin. \Delta\omega : \sin. (\tfrac{\pi}{2} - \varepsilon),$$

zijnde hier in ε de hoek $QM'M$, welke tegelijk met Δx verdwijnt. Hieruit volgt

$$MO = \frac{sin.\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}{sin.\ \Delta\omega} \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)},$$

dus $$lim.\, MO = \frac{ds}{d\omega} = R \text{ de kromtestraal.}$$

Het blijkt alzoo uit de voorgaande beschouwing, dat het middelpunt van den kromtecirkel de limiet is van het snijpunt der normalen in twee oneindig digt bij elkander gelegen punten der kromme, en dus de cirkel met MO als straal beschreven, den kromtecirkel van het punt M zal voorstellen.

Uit de vergelijking $R = \frac{ds}{d\omega}$, laat zich nu, met behulp der reeds in § 85 gevonden waarde van $d\omega$, gemakkelijk eene uitdrukking voor den kromtestraal, in functie der coördinaten x, y, en van hare differentialen, afleiden. Daar namelijk

$$d\omega = \frac{d^2y}{ds^2} \cdot dx,$$

vindt men onmiddelijk,

$$R = \frac{ds^3}{d^2y dx} = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Men is vrij algemeen overeengekomen den kromtestraal als positief te beschouwen, indien de kromme de holle zijde naar de as keert; en nademaal $\frac{d^2y}{dx^2}$ alsdan een negatieve waarde bekomt (§ 87), zal men, om R een positief teeken te doen verkrijgen, de voorgaande formule aldus behooren te schrijven (*)

$$R = -\frac{ds^3}{d^2y dx} = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

(*) Sommige hedendaagsche wiskundigen meenen integendeel aan den kromtestraal steeds eene positieve waarde te moeten toekennen, en plaatsen uit dien hoofde het dubbele teeken $\pm$ voor de waarde van R; geldende alsdan het bovenste of benedenste teeken, naar dat $\frac{d^2y}{dx^2}$ positief of negatief is. Het zal echter voor de uitkomst onverschillig zijn, welke der twee zienswijzen men hier verkiest te volgen.

§ 107. Men kan door de beide uiteinden van elken differentiaal des boogs s, dat is door twee op oneindig kleinen afstand van elkander genomen punten eener kromme, een onbepaald aantal cirkels laten gaan. De kromte-cirkel, welker grootte en ligging wij thans hebben bepaald, onderscheidt zich echter van al die cirkels hierdoor, dat hij de limiet voorstelt van eenen cirkel, gaande door drie op elkander volgende punten der kromme, welker afstanden oneindig klein aangenomen worden, zoodat er tusschen den kromte-cirkel en het element ds der kromme eene naauwere aanraking of ineensmelting plaats vindt, dan indien die cirkel slechts twee punten met de kromme gemeen heeft. Uit dien hoofde draagt de kromte-cirkel dan ook tevens den naam van *ineensmeltings-* of *osculerende cirkel* (*cercle osculateur*).

Stellen wij, om deze gewigtige eigenschap te betoogen, α, β voor de coördinaten van het middelpunt, en R voor den straal eens cirkels, gaande door drie achtereenvolgende punten M, M', M'' eener kromme, respectievelijk tot coördinaten hebbende,

$$(x,\ y),\ (x+dx,\ y+dy),\ (x+2dx,\ y+2dy+d^2y)$$

Laten x', y' de coördinaten zijn van een willekeurig punt van den omtrek des cirkels, dan zal de vergelijking dezer kromme zijn

$$(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2=R^2,$$

en hieruit zullen, na achtervolgende substitutien voor x', y', van de coördinaten der drie gemelde punten, welke op dien cirkelomtrek liggen, drie nieuwe vergelijkingen ontstaan, waardoor de grootheden R, α en β, in functie der coördinaten x, y en van hare differentiaal quotienten, kunnen uitgedrukt worden.

Alvorens deze substitutien te verrigten merken wij op, dat, wanneer eene vergelijking

$$F(x,y)=a \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (\alpha)$$

tevens geldig is, bijaldien de veranderlijke grootheden x, y twee achtervolgende malen met hare differentialen toenemen, en zij alzoo overgaat in

$$F(x+dx,\ y+dy)=a,$$

$$F(x+2dx,\ y+2dy+d^2y)=a.$$

de eerste dezer beide laatste vergelijkingen, hetzelfde beteekent als

$$F(x,\ y)+d.F(x,\ y)=a \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (\beta)$$

terwijl de tweede, welke uit de voorgaande afgeleid wordt, door x en y op nieuw met dx en dy te doen aangroeijen, zich aldus laat voorstellen

$$F(x+dx.\ y+dy)+dF(x+dx, y+dy) = a,$$

of, hetgeen op hetzelfde neerkomt

$$F(x,y)+2dF(x,y)+d^2F(x,y) = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

zoodat de vergelijkingen (β) (γ), op grond der oorspronkelijke vergelijking

$$F(x,y) = a,$$

zich thans herleiden tot deze twee meer eenvoudige differentiaal vergelijkingen

$$d.F(x,y) = 0, \qquad d^2.E(x,y) = 0.$$

Deze uitkomsten op de vergelijking des voormelden cirkels van toepassing makende, bekomen wij na twee achtervolgende differentiatiën, de drie vergelijkingen

$$(y-\beta)^2+(x-a)^2 = R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$(y-\beta)\,dy \ +(x-a)\,dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$(y-\beta)\,d^2y+dy^2+dx^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Uit de beide laatsten volgt onmiddelijk,

$$y-\beta = -\frac{dx}{dy}(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$y-\beta = -\left(\frac{dy^2+dx^2}{d^2y}\right) = -\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dus

$$x-a = \frac{dy}{dx}.\frac{\left(1+\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dy^2}{dx^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Deze waarden van $y-\beta$ en $x-a$ overbrengende in verg (1), bekomen wij

$$R = \pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

zijnde dezelfde waarde als reeds hiervoren (§ 106) voor de lengte des kromte-straals verkregen is.

De verg. (4) toont aan, dat het punt (α, β) of het middelpunt des kromtecirkels gelegen is op de normaal van het punt (x, y).

De vergelijkingen (5), (6) dienen, om elke der coördinaten α, β in functie van x en y uit te drukken, waardoor men vervolgens, met behulp der vergelijking van de gegevene kromme, eene betrekking tusschen de veranderlijke coördinaten α en β kan verkrijgen. Wij zullen hierop straks terugkomen.

§ 108. Men zal uit de waarde van R terstond opmaken, dat in elk buigpunt eener kromme, voor welk punt $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ is, de kromte-straal oneindig groot wordt. De kromte-cirkel gaat alsdan in eene regte lijn over, welke met de raaklijn in het buigpunt overeenstemt. Deze raaklijn is derhalve te beschouwen als eene limiet der door dat punt getrokken snijlijnen, welke drie achtervolgende punten met de kromme gemeen hebben, terwijl zulks bij de gewone raaklijn slechts met twee punten het geval is.

Wordt daarentegen $\frac{d^2y}{dx^2}$ voor eenig buig- of keerpunt oneindig groot, dan zal, indien $\frac{dy}{dx}$ voor dat punt geene oneindige waarde verkrijgt, de kromte-straal verdwijnen, en het punt (α, β) met het punt (x, y) overeenkomen.

Door het invoeren van de lengte der normaal $N = y\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})}$, kan men den kromtestraal ook onder dezen meer beknopten vorm voorstellen

$$R = -\left(\frac{N}{y}\right) \cdot \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

of

$$\frac{1}{R} = -\left(\frac{y}{N}\right)^3 \cdot \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Passen wij deze formule op de kegelsneden toe, begrepen in de algemeene vergelijking

$$y^2 = px + qx^2.$$

In § 90 is reeds gevonden,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p + 2qx}{2\sqrt{(px + qx^2)}} \quad \text{en} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{4y^3}.$$

Derhalve

$$R = \frac{N^3}{(\frac{1}{2}p)^2}.$$

In elke der drie kegelsneden is derhalve de lengte des kromtestraals evenredig aan de derde magt der normaal. Voor de parabool in het bijzonder, heeft men

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}. \quad \text{dus} \quad N = \sqrt{p\left(x + \frac{1}{4}p\right)},$$

en

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(p+4x)^3}{p}}.$$

In den top zal de grootste kromming plaats vinden, vermits R aldaar zijne kleinste waarde $\frac{1}{2}p$ of de halve parameter verkrijgt. Voor verder afgelegene punten zal de kromming al kleiner en kleiner worden.

Voor de ellips en hyperbool tot middelpunts vergelijking hebbende

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

is

$$\frac{dy}{dx} = \mp\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b^4}{a^2y^3},$$

dus

$$N = y\sqrt{\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)} = \frac{\sqrt{(a^4y^2 + b^4x^2)}}{a^2},$$

en

$$R = \frac{\sqrt{(a^4y^2 + b^4x^2)^3}}{a^4b^4}.$$

Voor $x = 0$, wordt $R = \frac{a^2}{b}$, zijnde de kromte-straal aan elk uiteinde der as $2b$ in de ellips. Voor $y = 0$, vindt men den kromte-straal aan elk uiteinde der as $2a$ in beide krommelijnen, $R = \frac{b^2}{a}$. Is nu $b < a$, dan blijkt hieruit, dat in de ellips de kromming in de uiteinden der kleine as, kleiner is dan in die der groote as. Door de waarde van R in functie van x uit te drukken, vindt men voor de ellips, $a^2 - b^2 = e^2$, stellende,

$$R = \frac{\sqrt{(a^4 - e^2x^2)^3}}{a^4b},$$

waaruit tevens gemakkelijk af te leiden is, dat de kromming aanhoudend toeneemt van de uiteinden der kleine as naar die der groote as.

§ 109. In de algemeene formule voor de waarde van den kromtestraal

$$R = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

is de differentiaal dx standvastig aangenomen. Wil men x en y als functiën eener derde veranderlijke grootheid beschouwd hebben, dan zal het tweede differentiaal-quotient (§ 74) moeten vervangen worden door $\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$. De voorgaande formule verkrijgt thans dezen meer symetrieken vorm

$$R = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

Het kan in sommige gevallen verkieselijk zijn, x en y als functiën van den boog s te beschouwen, en dus ds standvastig aan te nemen. Om dan de waarde van R op zoodanige onderstelling van toepassing te maken, zal men, ingevolge § 77, $\frac{d^2y}{dx^2}$ te vervangen hebben door $-\frac{d^2x ds^2}{dx^3 dy}$ of door $\frac{d^2y ds^2}{dx^4}$, hetgeen R doet overgaan in

$$R = \frac{dy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{d^2x} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{ds^2}} \quad \ldots\ldots (8)$$

of

$$R = -\frac{dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{d^2y} = -\frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{d^2y}{ds^2}} \quad \ldots\ldots (9)$$

Hieruit volgt nog, bij omkeering

$$\frac{1}{R}\frac{dy}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{1}{R}\frac{dx}{ds} = -\frac{d^2y}{ds^2},$$

dus

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right\}}.$$

Voor de Cycloide bijv. tot vergelijking hebbende,

$$y = \sqrt{(2r - x)\,x} + r\,B\,sinv.\,\frac{x}{r},$$

is in § 82 gevonden,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{2r - x}{x}\right)},$$

dus

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{x}{2r}} \text{ en } \frac{dy}{ds} = \sqrt{\left(\frac{2r - x}{2r}\right)},$$

Hieruit volgt

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2rx}}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{1}{4r},$$

en $$R = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = 4r\sqrt{\left(\frac{2r-x}{2r}\right)} = 2\sqrt{2r(2r-x)},$$

aantoonende, dat de kromtestraal *Mm*, in eenig punt *M* der cycloide (*fig.* 16) twee maal de lengte heeft van de normaal *MN* of van de koorde *RX*.

§ 110. Er bestaat nog eene andere algemeene uitdrukking voor den kromtestraal, toepasselijk op het geval waarin de vergelijking der kromme voorkomt onder den vorm

$$f(x,y) = 0,$$

en welke geene standvastige aangroeijing van eene der veranderlijke grootheden onderstelt. Zij berust op het gebruik der partiele differentiaal quotienten eener ingewikkelde functie.

Men heeft namelijk (§ 34),

$$\frac{df}{dx}\cdot dx + \frac{df}{dy}\cdot dy = 0,$$

dus $$\frac{ds^2}{dx^2} = \sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{\sqrt{\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\right\}}}{\frac{df}{dy}},$$

en $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)^2\cdot\frac{d^2f}{dy^2} - 2\frac{d^2f}{dxdy}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dy} + \left(\frac{df}{dy}\right)\cdot\frac{d^2f}{dx^2}}{\left(\frac{df}{dy}\right)^3}.$$

Deze waarden in de eerstgevondene formule voor *R* substituerende, bekomen wij de navolgende uitdrukking,

$$R = \frac{\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{df}{dx}\right)^2\cdot\frac{d^2f}{dy^2} - 2\frac{d^2f}{dxdy}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dy} + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\frac{d^2f}{dx^2}}.$$

Bijaldien de vergelijking $f(x,y) = 0$ uit twee deelen zamengesteld is, die elk in het bijzonder functien van slechts eene der twee veranderlijke grootheden x en y zijn, zal $\frac{d^2f}{dxdy}$ blijkbaar nul worden, en de waarde van den kromtestraal alsdan overgaan in deze meer eenvoudige uitdrukking

$$R = \frac{\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy^2}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{df}{dx}\right)^2\cdot\frac{d^2f}{dy^2} + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\cdot\frac{d^2f}{dx^2}}.$$

Deze laatste formule laat zich onder anderen met vrucht toepassen op de ellips

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Hier is
$$\frac{df}{dx}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{d^2f}{dx^2}=\frac{2}{-},$$

$$\frac{df}{dy}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{d^2f}{dy^2}=\frac{2}{b^2},$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2\frac{d^2f}{dy^2}+\left(\frac{df}{dy}\right)^2\frac{d^2f}{dx^2}=8\left\{\frac{x^2}{a^4b^2}+\frac{y^2}{a^2b^4}\right\}=\frac{8}{a^2b^2},$$

dus
$$R=8\left\{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right\}^{\frac{3}{2}}\times\frac{a^2b^2}{8}=\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

even als hiervoren reeds op eene andere wijze gevonden is.

§ 111. De bepaling des kromtestraals voor de verschillende punten eener ellips, vindt eenė belangrijke toepassing in de Geodesie, ten einde uit de hoegrootheid der gemeten meridiaans-boogen tot de kennis van de afplatting der aarde te geraken. Men beschouwt hierbij dat ligchaam als eene omwentelings-ellipsoide, en verstaat alsdan onder de geographische breedte van eenig punt des oppervlaks, de scherpe hoek, begrepen tusschen de door dat punt getrokken normaal, en de groote as der meridiaan-doorsnede. Zij nu φ de breedte van eenig punt, tot coördinaten in het meridiaan-vlak hebbende x, en y, dan geeft de middelpunts-vergelijking der ellips,

$$tg\,\varphi=-\frac{dx}{dy}=\frac{a^2y}{b^2x},$$

of
$$y=\frac{b^2}{a^2}.\,x\,tg\,\varphi.$$

Na substitutie dezer waarde van y in de vergelijking

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

komt er
$$x^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\,tg^2\varphi\right)=a^2;$$

dus
$$x^2=\frac{a^4\cos.^2\varphi}{a^2\cos.^2\varphi+b^2\sin.^2\varphi},$$

en
$$y^2=\frac{b^4\sin.^2\varphi}{a^2\cos.^2\varphi+b^2\sin.^2\varphi},$$

waaruit gemakkelijk afgeleid wordt,

$$b^4x^2 + a^4y^2 = \frac{a^4b^4}{a^2 \cos.^2\varphi + b^2 \sin.^2\varphi}.$$

Derhalve

$$R = \frac{a^2b^2}{(a^2 \cos.^2\varphi + b^2 \sin.^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2b^2}{\{a^2 - (a^2 - b^2)\sin.^2\varphi\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Stellende thans, ter bekorting, de verhouding

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2,$$

dan gaat de voorgaande formule over in

$$R = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin.^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Heeft men nu op twee verschillende breedten φ, φ' de lengten l, l' van een' meridiaan graad gemeten, en zijn R, R' de kromtestralen tot die breedten behoorende, dan zal men met een' voldoenden graad van naauwkeurigheid mogen stellen,

$$R : R' = l : l',$$

dus $$(1 - e^2 \sin.^2\varphi')^{\frac{3}{2}} : (1 - e^2 \sin.^2\varphi)^{\frac{3}{2}} = l : l',$$

of $$1 - e^2 \sin.^2\varphi' : 1 - e^2 \sin.^2\varphi = l^{\frac{2}{3}} : l'^{\frac{2}{3}}.$$

Hieruit wordt verder gevonden,

$$e^2 = \frac{l^{\frac{2}{3}} - l'^{\frac{2}{3}}}{l^{\frac{2}{3}} \sin.^2\varphi - l'^{\frac{2}{3}} \sin.^2\varphi'},$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{(1-e^2)} = \sqrt{\left\{\frac{l'^{\frac{2}{3}} \cos.^2\varphi' - l^{\frac{2}{3}} \cos.^2\varphi}{l^{\frac{2}{3}} \sin.^2\varphi - l'^{\frac{2}{3}} \sin.^2\varphi'}\right\}},$$

waardoor dus de afplatting $\frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$ bekend wordt.

§ 112. Het zal niet ondienstig zijn hier aan te toonen, dat men de vergelijkingen (5), (6), (7), (8), (9), ook regtstreeks kan afleiden uit *fig.* 41, waarin het middelpunt 0 des kromte-cirkels tevens het snijpunt voorstelt der normalen behoorende tot twee oneindig digt bij elkander gelegen punten M, M'. Trekkende namelijk uit 0 de loodlijn ON op de verlengde ordinaat MP, en noemende wederom α, β de positieve coördinaten van het punt 0, dan geeft de drie-

hoek MON, uit hoofde de hoek in O het complement van den hoek ω is,

$$y - \beta = R \cos.\omega = R\frac{dx}{ds} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

en

$$\alpha - x = R \sin.\omega = R\frac{dy}{ds} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Daar nu de grootheden R, α, β geene verandering ondergaan bij den overgang van x en y, in $x + dx$ en $y + dy$, zal men elke der vorige vergelijkingen enkel ten aanzien van x en y mogen differentiëren. Uit de eerste volgt dan, dx standvastig aannemende,

$$\frac{dy}{dx} = -R\frac{d^2s}{ds^2}.$$

Wijders geeft de differentiaal betrekking

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

in dezelfde onderstelling

$$\frac{d^2s}{ds^2} = \frac{dy\,d^2y}{ds^3}.$$

Derhalve

$$R = -\frac{ds^3}{d^2y\,dx} = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

en

$$y - \beta = R\frac{dx}{ds} = -\frac{ds^2}{d^2y} = -\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$x - \alpha = -R\frac{dy}{ds} = \frac{ds^2}{d^2y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Differentiëert men nog de verg. (10) en (11) ten aanzien van s, hierbij ds als standvastig aannemende, dan verkrijgen wij terstond

$$\frac{dy}{ds} = R\,\frac{d^2x}{ds^2} \quad \text{of } R = \frac{dy\,ds}{d^2x} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{d^2x}{ds^2}},$$

$$\frac{dx}{ds} = -R\,\frac{d^2y}{ds^2} \quad \text{of } R = -\frac{dx\,ds}{d^2y} = -\frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{d^2y}{ds^2}};$$

zijnde dezelfde uitkomsten, als in § 109, langs eenen anderen weg verkregen zijn.

§ 113. De middelpunten van de kromtecirkels der achtervolgende punten eener kromme lijn AMM' (*fig.* 42) vormen eene tweede kromme $A'OO'$, welke tot vergelijking heeft $f(\alpha, \beta) = 0$, en ten aanzien der gegevene kromme den naam van *ontwondene* (*développée*) draagt, terwijl wederkeerig de eerste de *ontwindende* (*développante*) van de tweede genaamd wordt. Die benamingen zijn gegrond op eene bijzondere eigenschap van den kromtestraal, welke zich gemakkelijk aldus laat betoogen.

Bij den overgang op de kromme AOO' van eenig punt (α, β) tot een naburig punt $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$, zullen zoowel de coördinaten x, y als de kromtestraal R van het overeenkomstige punt M, gelijktijdig met hunne differentialen aangroeijen. Differentiëren wij dan nogmaals de vergelijkingen (10) en (11) ten opzigte van s, hierbij echter alle daarin voorkomende grootheden als veranderlijk beschouwende, zoo vinden wij, met inachtneming der in de vorige § verkregene uitkomsten, voor het geval dat x en y alleen veranderlijk zijn,

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dR}{ds},$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dR}{ds},$$

welke betrekkingen terstond de twee navolgende opleveren,

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx}{dy}, \qquad d\alpha^2 + d\beta^2 = dR^2,$$

Wij mogen hieruit besluiten:

1.° dat de normalen in de punten der kromme AMM' tevens raaklijnen zijn aan de overeenkomstige punten der kromme $A'OO'$;

2.° dat, indien s' de lengte aanduidt van een boog der kromme AOO' begrepen tusschen eenig willekeurig punt en het punt $(\alpha, \beta,)$ die boog en de lengte des kromtestraals R met gelijke oneindig kleine verschillen zullen aangroeijen, waaruit verder het besluit op te maken is, dat de lengte van eenen eindigen boog OO' dezer laatste kromme gelijk is aan het verschil tusschen de kromtestralen $M'O'$ MO.

Verbeelden wij ons thans een' volkomen buigbaren en onrekbaren draad over den omtrek der kromme $A'OO'$ gespannen, en tot in A verlengd in de rigting AA' des kromtestraals van het punt A, of van de raaklijn in het punt A'. Zoo men nu dezen draad achtervolgens van de kromme ontwint, in dier voege dat het afgewonden

gedeelte steeds in de rigting eener raaklijn uitgespannen zij, dan is het duidelijk dat het uiteinde A des draads bij die beweging de kromme AMM' zal beschrijven. Deze eigenschap is het, welke tot de hiervoren vermelde benamingen der beide krommen heeft aanleiding gegeven. Wij leeren hieruit tevens dat elke kromme lijn beschouwd kan worden als eene vereeniging van een oneindig aantal kleine cirkelboogjes van veranderlijke stralen, en wier middelpunten op den omtrek eener andere zamenhangende kromme gelegen zijn.

Verlengt men het gedeelte van den draad, dat volgens de raaklijn in A' gespannen is, tot in a, dan zal bij de afwinding, eene andere kromme amm' door het uiteinde a beschreven worden, welke ofschoon verschillende van de kromme AMM', nogtans dezelfde ontwondene als deze zal hebben. Het blijkt hierbij, dat aangezien het stuk Aa eene willekeurige lengte kan verkrijgen, eene en dezelfde kromme de ontwondene zal kunnen zijn van een onbepaald aantal verschillende kromme lijnen, welke gemeenschappelijke normalen hebben, en evenwijdige krommen genaamd worden, terwijl daarentegen elke gegevene kromme slechts ééne enkele ontwondene zal opleveren.

De bepaling der *ontwindenden* van eene gegevene kromme een onderzoek zijnde, hetwelk tot het gebied der integraal-rekening behoort, zoo zullen wij ons later, ter zijner plaatse, hiermede bezig houden.

Stellen wij nog den kromtestraal van het punt (α, β) der ontwondene $= R'$, dan zal, omdat de hoek $d\omega$ tusschen de normalen in de punten (x, y), $(x + dx, y + dy)$ der kromme bevat, gelijk is aan dien, welken de raaklijnen in de overeenkomstige punten der ontwondene met elkander vormen, hieruit voortvloeijen de vergelijking

$$R' = \frac{ds'}{d\omega},$$

waarin $ds' = dR$ den differentiaal van een boog der ontwondene voorstelt. Maar $R = \frac{ds}{d\omega}$ zijnde, heeft men de navolgende eenvoudige betrekking tusschen twee overeenkomstige kromtestralen,

$$\frac{R}{R'} = \frac{ds}{ds'} = \frac{ds}{dR},$$

dus

$$R\frac{dR}{ds} = R'.$$

Bij de behandeling der ontwindenden zullen wij gelegenheid vinden deze laatste vergelijking in toepassing te brengen.

§ 114. Wij zullen thans door enkele voorbeelden het gebruik aantoonen der formules

$$y-\beta=-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$x-\alpha=-(y-\beta)\frac{dy}{dx}.$$

tot het onderzoeken van den aard der ontwondene eener gegevene kromme.

1° *Voorbeeld.* De parabool $y^2=px$ (*fig.* 43).

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{2y}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{x^3}}=-\frac{p^2}{4y^3},$$

$$y-\beta=\left(1+\frac{p^2}{4y^2}\right).\frac{4y^3}{p^2}=y+\frac{4y^3}{p^2},$$

dus $$\beta=-\frac{4y^3}{p^2},\quad \text{en } y=-\sqrt[3]{\frac{p^2\beta}{4}},$$

$$x-\alpha=-\frac{p}{2y}\left(y+\frac{4y^3}{p^2}\right)=-\frac{p}{2}-2x,$$

waaruit $$x=\frac{1}{3}\left(\alpha-\frac{p}{2}\right).$$

Stellende nu kortheidshalve $\alpha-\frac{p}{2}=\alpha'$, waardoor de oorsprong verplaatst wordt naar het middelpunt A' van den kromte-cirkel in den top, en alzoo in het aanvangspunt der ontwondene, dan geven de voorgaande waarden van x en y, in verbinding tot de vergelijking der parabool,

$$\sqrt[3]{\left(\frac{p^2\beta}{4}\right)^2}=\frac{p\alpha'}{3},$$

of $$\beta^2=\frac{16}{27p}\alpha^3.$$

Deze is de vergelijking eener kromme, genaamd de cubische parabool, waarvan de benedenste tak $A'O'$ de ontwondene van den bovensten

tak der parabool, en zoo ook omgekeerd, voorstelt. Die kromme zal zich boven en beneden de as der abscissen tot in het oneindige uitstrekken, en in het punt A' een keerpunt hebben, gelijk nader blijken kan, uit de differentiatie der vergelijking

$$\beta = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3}{3p}},$$

waardoor men bekomt,

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{3p}},$$

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{3p\alpha}}.$$

Voor $\alpha = 0$, wordt $\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$, en $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \infty$.

Voor negatieve waarden van α, worden β, $\frac{d\beta}{d\alpha}$ en $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ onbestaanbaar, en voor positieve, zijn β en $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ van hetzelfde teeken, ten blijke alzoo dat elk der beide takken de bolle zijde naar de as keert.

2^e *Voorbeeld.* De ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (*fig.* 44).

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$y - \beta = \left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)\frac{a^2y^3}{b^4} = y\left(\frac{a^2y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^2}\right),$$

of

$$y - \beta = y\left(1 + \frac{(a^2-b^2)y^2}{b^4}\right),$$

en

$$\beta = -\left(\frac{a^2-b^2}{b^4}\right)y^3, \quad \text{dus} \quad y = -b\sqrt[3]{\frac{b\beta}{a^2-b^2}},$$

$$x - \alpha = \frac{b^2x}{a^2}\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2-x^2}{b^2}\right\} = x - \frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4},$$

waaruit

$$\alpha = \frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4}, \quad \text{dus} \quad x = a\sqrt[3]{\frac{a\alpha}{a^2-b^2}}.$$

De gevondene waarden van x en y in de vergelijking der ellips overbrengende, zal men, na eenige herleiding, voor de vergelijking der ontwondene bekomen,

$$\sqrt[3]{a^2\alpha^2} + \sqrt[3]{b^2\beta^2} = \sqrt[3]{(a^2-b^2)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

welke vergelijking terstond aanduidt, dat de ontwondene uit vier aan elkander volkomen gelijke takken EF, FH, HG, GE zamengesteld is,

zoo als die in *fig.* 44 voorgesteld zijn, en welke, door ontwinding, de elliptische quadranten AC, BC, BD, DA zullen voortbrengen. Stellende in de gevondene vergelijking achtervolgens $\alpha = 0$, $\beta = 0$, dan verkrijgt men

$$OG = OF = \frac{a^2-b^2}{b} = \frac{a^2}{b} - b,$$

$$OH = OE = \frac{a^2-b^2}{a} = a - \frac{b^2}{a},$$

welke uitkomsten ook uit de, hiervoren in § 108 reeds verkregene, waarden voor de lengten der kromtestralen in de toppen A en B voortvloeijen. Heeft men $\frac{a^2}{b} - b > b$ of $a > b\sqrt{2}$, dan liggen de punten F en G op het verlengde der kleine as, zoodat een gedeelte der ontwondene zich alsdan buiten de ellips uitstrekt.

De vergelijking (12) leidt onmiddellijk tot die der ontwondene van de hyperbool, door slechts b^2 in $-b^2$ te veranderen, als wanneer zij wordt

$$\sqrt[3]{\alpha^2 a^2} - \sqrt[3]{b^2\beta^2} = \sqrt[3]{(a^2+b^2)^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Deze kromme bestaat uit vier oneindig voortloopende takken (*fig.* 45) aanvangende in de middelpunten C, D, der kromtecirkels in de beide toppen A, B. Voor $\beta = 0$, vindt men $OD = OC = a + \frac{b^2}{a}$. De kromtestralen in de opvolgende punten der hyperbool worden hoe langer hoe grooter, zoodat de kromme meer en meer tot eene regtlijnige rigting nadert, welke die van hare assymptooten is. De rigting der ontwondene nadert derhalve meer en meer tot die eener loodlijn op de tegen overliggende assymptoot.

3ᵉ *Voorbeeld.* De cycloide

$$y = \sqrt{(2r-x)x} + r\, B\, sinv.\, \frac{x}{r}.$$

Vroeger (§ 109) is reeds gevonden,

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{\left(\frac{x}{2r}\right)},\ \frac{dy}{ds} = \sqrt{\left(\frac{2r-x}{2r}\right)},\ R = 2\sqrt{2r(2r-x)},$$

dus

$$y - \beta = R\,\frac{dx}{ds} = 2\sqrt{(2r-x)x},$$

$$\alpha - x = R\,\frac{dy}{ds} = 2(2r-x),$$

waaruit volgt

$$\beta = rB\,\text{sinv.}\frac{x}{r} - \sqrt{x(2r-x)},$$

$$a = 4r - x.$$

Verplaatsen wij thans den oorsprong naar het punt A der cycloide (*fig.* 16), en stellen wij alzoo $y' = r\pi - \beta$, $x' = a-2r$, dan heeft men

$$x = 4r - a = 2r - x',$$

$$y' - r\pi = \sqrt{x(2r-x)} - rB\,\text{sinv.}\frac{x}{r},$$

$$= \sqrt{x'(2r-x')} - rB\,\text{sinv.}\frac{2r-x'}{r},$$

dus $$y' = \sqrt{x'(2r-x')} + rB\,\text{sinv.}\frac{x'}{r},$$

waaruit blijkt dat de ontwondene AB' van den tak TAB der cycloide op nieuw eene cycloide is, welks top in A ligt, en een' omgekeerden stand ten aanzien der eerste heeft.

Daar de kromtestraal in het punt A nul is, zal de kromtestraal Mm van eenig punt M overal de lengte van den boog Am der ontwondene aanwijzen, en hieruit volgt alzoo de eigenschap dat de lengte van elken cycloidalen boog BM gerekend van den top B, gelijk is aan het dubbel der overeenkomstige koorde BR van den voortbrengenden cirkel.

Men zal overigens uit de figuur gemakkelijk bemerken, hoedanig de tak ABC der cycloide door ontwinding der beide halve takken AB', $B'C$ voortgebragt wordt.

4° *Voorbeeld.* De hypocycloide, tot middelpunts vergelijking hebbende,

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2},$$

is eene kromme lijn $ABCD$, in *fig.* 46 voorgesteld, en voortgebragt door een punt op den omtrek van een cirkel, rollende over den binnen-omtrek van een' anderen cirkel, welks straal a vier malen de lengte heeft van dien des bewegenden cirkels.

Hier is $$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

en $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3x}\left(\frac{a^2}{xy}\right)^{\frac{1}{3}},$$

Voorts
$$\frac{ds}{dx} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Dus
$$R = -\frac{a}{x} \times 3x \times \left(\frac{xy}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}} = -3\sqrt[3]{axy}.$$

Voor $x = 0$, is $y = \pm a$, en voor $y = 0$, $x = \pm a$.

In elk der keerpunten A, B, C, D is de kromtestraal nul. Om de punten te bepalen, waarin R zijne grootste waarde verkrijgt, heeft men slechts die coördinaten te zoeken, welke het product xy tot een maximum maken, en dus aan de vergelijking

$$y + x\frac{dy}{dx} = 0$$

voldoen. Hierin de gevondene waarde van $\frac{dy}{dx}$ substituërende, vindt men

$$x = y = \pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Zoo men dus de middellijnen $A'C'$, $B'D'$ trekt, die de hoeken der coördinaten-assen midden door deelen, en de kromme in de punten p, q, r, s snijden, dan zullen deze blijkbaar de gezochte punten wezen. Voor elk derzelve zal de kromtestraal $= \frac{3}{2}a$, en tevens volgens eene der vier genoemde middellijnen gerigt zijn.

Gaan wij thans tot het onderzoek van de vergelijking der ontwondene over. Te dien einde hebben wij,

$$y - \beta = -\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \times 3x\left(\frac{xy}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}} = -3\sqrt[3]{x^2y},$$

$$x - \alpha = -\frac{dy}{dx}(y - \beta) = -3\sqrt[3]{xy^2},$$

dus
$$\beta = y + 3\sqrt[3]{x^2y},$$

en
$$\alpha = x + 3\sqrt[3]{xy^2},$$

$$\beta + \alpha = (\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{x})^3,$$

$$\beta - \alpha = (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x})^3,$$

waaruit volgt

$$(\beta + \alpha)^{\frac{2}{3}} + (\beta - \alpha)^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{y^2} + 2\sqrt[3]{x^2} = 2\sqrt[3]{a^2}.$$

Nemende nu de loodlijnen OA', OB' tot coördinaten-assen aan, dan hebben wij tusschen de coördinaten x', y' ten aanzien dezer

nieuwe assen, en de coördinaten α, β, zoo als bekend is, de navolgende betrekkingen.

$$\beta = (y' + x')\sqrt{\tfrac{1}{2}}. \qquad \alpha = (x' - y')\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

dus $$\beta + \alpha = x'\sqrt{2}. \qquad \beta - \alpha = y'\sqrt{2},$$

waardoor de vergelijking der ontwondene overgaat in

$$\sqrt[3]{x'^2} + \sqrt[3]{y'^2} = \sqrt[3]{4a^2},$$

aantoonende, dat de ontwondene wederom eene hypocycloide $A'B'C'D'$ is, behoorende tot een cirkel, van tweemaal grooteren straal.

De punten A,B,C,D zijn aan beide krommen gemeen. De tak AB wordt voortgebragt door ontwinding der twee halve takken AB', BB', en op gelijke wijze worden de overige takken beschreven.

VIJFTIENDE LES.

Gebruik van het polaire coördinaten-stelsel bij het bepalen van den kromte-straal, en van de vergelijking der ontwondene.

§ 115. De in de vorige les gevondene formule voor de lengte des kromte-straals, kan onmiddelijk in functie der polaire coördinaten worden uitgedrukt, zoodra men slechts daarin x en y door hunne waarden $z\,cos.\varphi$, $z\,sin.\varphi$ vervangt, en daarbij den hoek φ in plaats van x, als het onafhankelijke veranderlijke element beschouwt, ten welken einde men tot grondslag zal behooren te nemen de formule voor R, waarin dx even als dy veranderlijk is, te weten

$$R = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

De hierbedoelde substitutie kan echter gemakkelijk verrigt worden, met behulp der navolgende tusschen de vier veranderlijke grootheden x, y, z, φ, bestaande betrekkingen:

$$x + y\sqrt{-1} = ze^{\varphi\sqrt{-1}}. \quad x - y\sqrt{-1} = ze^{-\varphi\sqrt{-1}},$$

waaruit door achtervolgende differentiatien afgeleid wordt,

$$dx + dy\sqrt{-1} = \left(\frac{dz}{d\varphi} + z\sqrt{-1}\right)e^{\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi,$$

$$dx - dy\sqrt{-1} = \left(\frac{dz}{d\varphi} - z\sqrt{-1}\right)e^{-\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi,$$

$$d^2x + d^2y\sqrt{-1} = \left\{\frac{d^2z}{d\varphi^2} - z + 2\frac{dz}{d\varphi}\sqrt{-1}\right\}e^{\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi^2,$$

$$d^2x - d^2y\sqrt{-1} = \left\{\frac{d^2z}{d\varphi^2} - z - 2\frac{dz}{d\varphi}\sqrt{-1}\right\}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi^2.$$

De beide eerste differentiaal betrekkingen geven, even als in § 99,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dz^2 + z^2d\varphi^2.$$

Om de waarde van $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ te verkrijgen, merke men

op, dat deze uitdrukking de coëfficiënt van $\sqrt{-1}$ is, in het product

$$(dx-dy\sqrt{-1})\ (d^2x+d^2y\sqrt{-1})$$
$$=\left(\frac{dz}{d\varphi}-z\sqrt{-1}\right)\left\{\frac{d^2z}{d\varphi^2}-z+2\frac{dz}{d\varphi}\sqrt{-1}\right\}d\varphi^3.$$

Hieruit volgt alzoo onmiddelijk

$$dx\,d^2y-dy\,d^2x=\left(z^2+2\frac{dz^2}{d\varphi^2}-z\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)d\varphi^3,$$

en dus

$$R=\frac{\left(z^2+\frac{dz^2}{d\varphi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{z^2+2\frac{dz^2}{d\varphi^2}-z\frac{d^2z}{d\varphi^2}}\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Wil men evenwel de lengte des kromte-straals regtstreeks bepalen, zonder de formule die voor het regthoekige coördinaten-stelsel geldt, tot grondslag te nemen, dan behoeft men slechts in de formule

$$R=\frac{ds}{d\omega}=\frac{ds}{d\varphi}\times\frac{d\varphi}{d\omega},$$

welke onafhankelijk van eenig coördinaten-stelsel is, voor $\frac{d\varphi}{d\omega}$ te substituëren, de daarvoor reeds in § 102 gevondene uitdrukking

$$\frac{z^2\,d\varphi^2+2dz^2-z\,d^2z}{ds^2},$$

als waardoor men terstond de form. (1) zal verkrijgen.

Daar wijders het positief of negatief zijn dezer laatste uitdrukking of van den noemer en de waarde van R, het kenmerk oplevert of de kromme de holle dan wel de bolle zijde naar de pool keert (§ 103), zal men, volgens de aangenomen overeenkomst, de form. (1) geene verandering van teeken behoeven te doen ondergaan.

§ 116. Door het invoeren der uit de pool op de raaklijn getrokken loodlijn λ, kan de formule voor den kromte-straal ook onder eenen meer beknopten vorm worden uitgedrukt. Immers, in § 102, vonden wij de differentiaal betrekking

$$\frac{d\lambda}{d\varphi}=d\left(\frac{z^2d\varphi}{ds}\right)=z\frac{dz}{d\varphi}\cdot\frac{d\omega}{ds}=z\frac{dz}{d\varphi}\times\frac{1}{R}.$$

Derhalve
$$R=\frac{z\,dz}{d\lambda}=\frac{z\,dz}{d.\left(\frac{z^2\,d\varphi}{ds}\right)}\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Neemt men ds als standvastig aan, dan wordt

$$R = \frac{z\,dz\,ds}{z^2 d^2\varphi + 2\,z dz\, d\varphi}.$$

Maar, uit de vergelijking

$$z^2 d\varphi^2 + dz^2 = ds^2,$$

volgt, door differentiatie,

$$z^2 d\varphi\, d^2\varphi + z dz\, d\varphi^2 + dz\, d^2 z = 0,$$

dus $$(z^2 d^2\varphi + 2\,z dz\, d\varphi)\, d\varphi = (z d\varphi^2 - d^2 z)\, dz,$$

en $$R = \frac{z ds\, d\varphi}{z d\varphi^2 - d^2 z}.$$

of $$R' = \frac{z\frac{d\varphi}{ds}}{z\frac{d\varphi^2}{ds^2} - \frac{d^2 z}{ds^2}},$$

welke formule dienen kan ter berekening van R, wanneer z en φ in functie van den boog s uitgedrukt zijn.

De hiervoren verkregene formule (2) voor R kan daarenboven door de navolgende beschouwing uit de figuur regtstreeks afgeleid worden. Laat namelijk Mm (*fig.* 47) de lengte des kromtestraals van het punt M, en dus m het overeenkomstige punt der ontwondene aanduiden; stellen wij den voerstraal $Om = u$, dan geeft ons de driehoek OMm, waarin de hoek $M = 90^\circ - \psi$ is, de vergelijking

$$u^2 = R^2 + z^2 - 2Rz\sin.\psi,$$

of $$u^2 = R^2 + z^2 - 2R\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Daar nu het punt m de snijding is van twee oneindig digt bij elkander gelegen normalen, zoo zullen, bij den overgang van eenig punt M tot het punt M', eeniglijk de coördinaten van het punt M met hunne differentialen aangroeijen, terwijl de lijnen R en u daarbij onveranderd blijven. Uit dien hoofde mogen wij de verg. (3) differentiëren, eeniglijk ten aanzien van z en λ, en daarbij de overige grootheden als standvastig beschouwen. Wij bekomen als dan terstond

$$2\,zdz - 2Rd\lambda = 0,$$

en dienvolgens

$$R = \frac{zdz}{d\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

even als hiervoren.

Stellende nog den veranderlijken hoek $mOA = t$, dan kunnen wij uit de figuur twee betrekkingen afleiden, , welke, in verband tot de vergelijking $z = f(\varphi)$, kunnen dienen, om eene betrekking tusschen t en u, of met andere woorden, om de vergelijking der ontwondene te verkrijgen.

Trekken wij te dien einde de loodlijn mn op OM, dan geeft de driehoek Mom

$$u \sin.(t - \varphi) = R \cos.\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$u \cos.(t - \varphi) = z - R \sin.\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Dezelfde driehoek levert daarenboven nog twee differentiaal betrekkingen op, waarvan bij de bepaling der ontwindende een nuttig gebruik zal kunnen gemaakt worden. Daar namelijk de lijn Mm de raaklijn aan het punt m der ontwondene voorstelt, is

$$\sin.(R, u) = \frac{udt}{dR}, \quad \text{en} \quad \cos.(R, u) = \frac{du}{dR} \quad (\S\ 99).$$

Derhalve, trekkende de loodlijn OQ op Mm, komt er

$$QM - Mm = Qm,$$

of

$$R - \frac{z^2 d\varphi}{ds} = \frac{udu}{dR} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

en

$$OQ = \frac{zdz}{ds} = \frac{u^2 dt}{dR} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

§ 117. Passen wij de voorgaande formules op een paar kromme lijnen toe.

1° *Voorbeeld.* De hyperbolische spiraal

$$z\varphi = a.$$

Men heeft alsdan

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\frac{z^2}{a}, \quad \frac{d^2 z}{d\varphi^2} = \frac{2z^3}{a^2}, \quad \frac{ds}{d\varphi} = z\sqrt{\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)},$$

$$\lambda = z^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{z}{\sqrt{\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)}}.$$

$$R = \frac{\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^3}{z^2 + \frac{2dz^2}{d\varphi^2} - z\frac{d^2 z}{d\varphi^2}} = z\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

De kromming vermindert alzoo naarmate z toeneemt of φ tot

nul nadert, hetgeen door het bestaan der assymptoot bevestigd wordt.

Wijders volgt uit de verg. (3),

$$u^2 = z^2\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^3 + z^2 - 2z\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \times z\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$u^2 = z^2\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^3 - z^2 - \frac{2z^4}{a^2},$$

of $$u^2 = \frac{z^4}{a^2}\left\{1+\frac{3z^2}{a^2}+\frac{z^4}{a^4}\right\}.$$

Het bepalen der betrekking tusschen u en t tot eenige omslagtige bewerkingen aanleiding gevende, zoo zullen wij ons hiermede niet inlaten. Uit de gevondene waarde van u blijkt echter, dat deze voerstraal te gelijk met z onbepaald toeneemt, en evenmin als deze laatste nul kan worden.

Deze omstandigheid doet reeds voorzien, dat de ontwondene insgelijks eene soort van spiraal zijn, die den pool meer en meer nabij komt, zonder ooit dat punt te kunnen bereiken.

2° *Voorbeeld.* De logarithmische spiraal

$$z = a^\varphi.$$

Deze vergelijking geeft

$$\frac{dz}{d\varphi} = a^\varphi\, l(a) = z\, l(a), \quad \frac{ds}{d\varphi} = z\sqrt{1+l(a)^2}.$$

$$\lambda = \frac{z^2 d\varphi}{ds} = \frac{z}{\sqrt{(1+l(a)^2)}},$$

$$R = \frac{zdz}{d\lambda} = z\sqrt{(1+l(a)^2)} = z\sqrt{(1+cot.^2\psi)} = \frac{z}{sin.\psi},$$

De kromte-straal neemt dus toe evenredig aan den voerstraal, zoodat de kromming voor ver afgelegen punten meer en meer tot eene regtlijnige rigting nadert.

Het blijkt uit de waarde van R, dat het middelpunt des kromtecirkels in eenig punt M (*fig.* 36) gelegen is op het uiteinde der normaal Mm; en daar de kromte-straal met den voerstraal Pm van het punt m der ontwondene steeds denzelfden hoek ψ vormt, zoude hieruit reeds op te maken zijn, dat deze kromme insgelijks tot de logaritmische spiralen behoort.

Uit de vergelijking (6) volgt

$$u\,cos.\,(t-\varphi) = 0,$$

dus $$t-\varphi = \frac{\pi}{2}. \quad t = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

het geen insgelijks met de figuur overeenstemt.

Hierdoor geeft verg. (5)

$$u = R\,cos.\,\psi = z\,cot.\,\psi = z\,l(a),$$

dus $$z = \frac{u}{l(a)} = a^{\varphi} = a^{t-\frac{\pi}{2}},$$

of $$u = l(a)\,a^{t-\frac{\pi}{2}}.$$

Stellende nu $l(a) = a^{m}$, en $m - \frac{\pi}{2} + t = t'$,

dan gaat de vergelijking der ontwondene over in

$$u = a^{t'},$$

ten blijke alzoo, dat deze kromme op nieuw eene logarithmische spiraal is, welke van de oorspronkelijke eeniglijk in ligging verschilt, dewijl de as der hoeken in de gegevene kromme, met die der ontwondene een hoek vormt, waarvan de grootte aangewezen wordt door

$$m - \frac{\pi}{2}.$$

De beide spiralen zullen elkander dus volkomen bedekken, indien men de eerste dezer beide assen den aangewezen hoek in den negatieven zin doet doorloopen.

3° *Voorbeeld.* De gewone epicycloide (*fig.* 48) voortgebragt door eenig punt M van den omtrek eens cirkels rollende over den omtrek van eenen anderen cirkel van gelijken straal. Zij O het aanvankelijke raakpunt der beide krommen, tot pool genomen, en de straal $CO = r$ gesteld. Is nu A het raakpunt der cirkels na het doorloopen van den boog OM der kromme, en C' het middelpunt des rollenden cirkels, dan volgt uit de gelijkheid der hoeken ACO, $AC'M$, dat de voerstraal OM evenwijdig aan de lijn $A'A$ loopt, en dus $MN = CC'$ is. Stellende verder $OM = z$, en hoek $MOX = \varphi$; dan vindt men gemakkelijk voor de polaire vergelijking der hier beschouwde epicycloide

$$z = 2r(1 - cos.\varphi) = 4r^2\,sin.^2\,\frac{1}{2}\varphi.$$

De constructie voor deze kromme bestaat alzoo eenvoudiglijk hierin, dat men door het punt O lijnen trekke, snijdende den vasten cirkel in eenig punt N, en vervolgens ter wederzijde van dat punt, de beide afstanden NM, NM' elk gelijk aan de lengte der middellijn uitzette; de punten M, M' zullen alsdan tot de epicycloide behooren. Uit het differentiëren der vorenstaande vergelijkingen, bekomt men

$$\frac{dz}{d\varphi} = 2r \sin.\varphi, \qquad \frac{d^2z}{d\varphi^2} = 2r \cos.\varphi.$$

Ter bepaling van de rigting der raaklijn MT aan eenig punt M, heeft men

$$tg.\psi = \frac{zd\varphi}{dz} = \frac{1-\cos.\varphi}{\sin.\varphi} = tg.\frac{1}{2}\varphi.$$

Daar nu hoek AMO = hoek $MAC' = 90^0 - \frac{1}{2}\varphi$ is, volgt hieruit, dat MT loodregt op de koorde MA staat, en deze dus de rigting in het punt M des kromte-straals aantoont. In het punt O' zal de raaklijn loodregt op $O'O$ staan.

De formule

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(z^2 + \frac{dz^2}{d\varphi^2}\right)} = 2r\sqrt{\left\{(1-\cos.\varphi)^2 + \sin.^2\varphi\right\}}$$

$$= 2r\sqrt{2(1-\cos.\varphi)} = 4r \sin.\frac{1}{2}\varphi,$$

geeft

$$\lambda = \frac{z^2d\varphi}{ds} = 4r \sin.^3\frac{1}{2}\varphi.$$

Derhalve

$$R = \frac{zdz}{d\lambda} = \frac{8r^2 \sin.\varphi \sin^2\frac{1}{2}\varphi}{6r \sin.^2\frac{1}{2}\varphi \cos.\frac{1}{2}\varphi} = \frac{8}{3} r \sin.\frac{1}{2}\varphi.$$

Daar wijders $MA = 2r \sin.\frac{1}{2}\varphi$, zal men het middelpunt m des kromte-cirkels kunnen bepalen, door de koorde MA met een derde gedeelte te verlengen. In het punt O is $R=0$, aldaar is tevens $\psi = 0$. Het keerpunt O is dus tevens een punt der ontwondene. In het punt O', alwaar $\varphi = 180^0$ is, verkrijgt de kromtestraal zijne grootste waarde $\frac{8r}{3}$. Door Co gelijk aan $\frac{1}{3}r$ te nemen, zal $O'o$ de lengte van den kromte-straal van het punt O' aanwijzen.

Het bepalen van den aard der ontwondene met behulp der vergelijkingen (5), (6), zou tot vrij omslagtige bewerkingen aanleiding

geven, weshalve wij ons hiermede niet zullen inlaten. Men kan echter door eene meetkunstige beschouwing spoedig tot het besluit komen, dat de ontwondene wederom eene gelijksoortige epicycloide is, waarvan de straal des cirkels een derde van dien der gegeven kromme bedraagt. Zie hier een zeer eenvoudig bewijs van deze fraaije eigenschap, hetwelk ons, voor een paar jaren, door den Heer L. Cohen Stuart, destijds student aan de Delftsche Akademie, is medegedeeld geworden.

Men verlenge de beide koorden MA, $M'A'$ tot in het punt P, dan ligt dat snijpunt blijkbaar op den omtrek des grond-cirkels, en tevens op het verlengde van den straal NC. Neemt men vervolgens $Cn = \frac{1}{3} CP$, en trekt men door n de lijn $m'm$ evenwijdig aan de middellijn AA', zoo verkrijgt men twee punten m, m' der ontwondene, vermits $Mm = \frac{4}{3} AM$, en $M'm' = \frac{4}{3} A'M'$. De driehoeken CMN, $Cm'n$ zullen gelijkvormig zijn, want $Cn = \frac{1}{3} CN$, $m'n = \frac{2}{3} CA' = \frac{1}{3} MN$, en hoek $Cnm' =$ hoek CNM. De lijn Cm' is derhalve gelijk aan $\frac{1}{3} CM$, en ligt op het verlengde van deze. Op gelijke wijze blijkt, dat Cm het verlengde van en gelijk aan $\frac{1}{3} CM'$ is. Men kan alzoo de ontwondene construëren door uit het middelpunt C, lijnen CM te trekken, en op het verlengde dezer voerstralen, de stukken $Cm' = \frac{1}{3} CM$ uit te zetten, waaruit dus eene met de epicycloide gelijkvormige kromme zal ontstaan, welker afmetingen een derde van die der gegevene kromme zullen bedragen, hetgeen te bewijzen was.

Men zal tevens gemakkelijk inzien, dat de kromme en hare ontwondene eene tegenovergestelde ligging ten opzigte van elkander hebben.

ZESTIENDE LES.

Over de kromlijnige aanrakingen van verschillende orden.

§ 118. Wanneer eene kromme AMN (*fig.* 49), tot vergelijking hebbende $y = F(x)$, door eene regte lijn in eenig pnnt M geraakt wordt, en de abscis x van dat punt met h aangroeit, zal het verschil tusschen de ordinaten, behoorende in de regte en in de kromme lijn tot dezelfde abscis $x + h$, uitgedrukt worden door

$$F(x + h) - \left(y + h\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}h^2 F_2(x + ih).$$

Dat verschil blijkt alzoo een oneindig kleine van de tweede orde te worden, zoodra de abscis eene oneindig kleine aangroeijing Pp ondergaat.

Beschouwt men thans eene tweede kromme $A'MN'$, gelegen tusschen de eerste AMN en hare raaklijn in M, in dier voege dat deze eene gemeenschappelijke raaklijn aan beide krommen wordt, dan zal voor deze tweede kromme, welker vergelijking zij $y = f(x)$, in het aanrakings-punt M, niet alleen $f(x) = F(x)$, maar tevens $f_1(x) = F_1(x)$ moeten zijn. De beide krommen worden alsdan gezegd elkander in het punt M te raken. Het verschil $n'n$ der ordinaten tot de gemeenschappelijke abscis $x + h$ behoorende, zal tot waarde hebben

$$\frac{1}{2}h^2 \left(f_2(x + ih) - F_2(x + ih)\right),$$

en dus ook voor $h = dx$, eene oneindig kleine van de tweede orde worden. De onderlinge aanraking der beide krommen wordt, even als die van elk derzelve met de regte lijn Mm, in dat geval eene raking van de eerste orde genaamd.

Veronderstellen wij nu, dat $\frac{d^2y}{dx^2}$ voor de beide krommen, dezelfde waarde in het punt M hebbe, zoo dat aldaar de navolgende vergelijkingen plaats vinden,

$$f(x) = F(x), \quad f_1(x) = F_1(x), \quad f_2(x) = F_2(x),$$

dan geeft de reeks van TAYLOR voor het verschil der ordinaten,

$$f(x+h) - F(x+h) = \frac{h^3}{2.3}\{f_3(x+ih) - F_3(x+ih)\}.$$

Voor eene oneindig kleine aangroeijing der abscis x zal dus het verschil $n'n$, in de aangenomen onderstelling, thans eene oneindig kleine van de derde orde worden. Hierdoor ontstaat er eene naauwere aanraking tusschen de beide krommen dan in het voorgaande geval. Deze aanraking wordt uit dien hoofde gezegd van de tweede orde te zijn, en het is gemakkelijk te betoogen, dat geene derde rakende kromme $y = \varphi(x)$, voor welke $\varphi_2(x)$ niet dezelfde waarde heeft in het punt M als $f_2(x)$ of $F_2(x)$, tusschen deze twee laatste krommen, door dat punt kan getrokken worden. Immers, daar

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\,\varphi_1(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi_2(x) + \frac{h^3}{2.3}\varphi_3(x+ih),$$

zal het verschil $\varphi(x+h) - F(x+h)$, tot waarde hebben

$$\frac{h^2}{1.2}(\varphi_2(x) - F_2(x)) + \frac{h^3}{2.3}(\varphi_3(x+ih) - F_3(x+ih)),$$

en derhalve, bij afneming van h, steeds grooter blijven dan het hiervoren opgegeven verschil $nn' = f(x+h) - F(x+h)$. Voor negatieve waarden van h geraakt men tot dezelfde uitkomst.

Is de kromme $F(x)$ van dien aard, dat ook in het raakpunt M, $F_3(x) = f_3(x)$ zij, zoo vindt men voor het ordinaten verschil $n'n$,

$$\frac{h^4}{2.3.4}(f_4(x+ih) - F_4(x+ih)),$$

en dus voor $h = dx$, eene oneindig kleine van de vierde orde. De aanraking wordt in dat geval eene van de derde orde genaamd. Op die wijze voortgaande, komt men terstond tot dit algemeene besluit.

Indien in het gemeenschappelijke raakpunt (x, y) *van twee kromme lijnen* y = f(x) en y = F(x), *de differentiaal quotienten*

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \cdots \frac{d^ny}{dx^n},$$

voor beide krommen dezelfde waarden verkrijgen, zal het verschil tusschen de ordinaten van twee oneindig digt bij het raakpunt genomen punten op de beide krommen, tot dezelfde abscis behoorende, eene oneindig kleine van de $(n+1)^e$ *orde, en de raking der krommen eene van de* n^e *orde wezen.*

Hieruit laat zich nu gemakkelijk de navolgende eigenschap afleiden.

Indien twee krommen met elkander eene aanraking van de n[e] *orde hebben, zal men door het gemeenschappelijke raakpunt geene derde kromme, welker aanraking met eene der beide eersten van eene lagere orde is, tusschen die twee krommen kunnen laten gaan.*

Bij deze stelling is echter stilzwijgend tot voorwaarde aangenomen, dat de raaklijn in het raakpunt niet loodregt op de as der abscissen sta, dewijl $\frac{dy}{dx}$ alsdan, even als de opvolgende differentiaal-quotienten oneindig groot wordende, het verschil $f(x+h)-F(x+h)$, voor oneindig kleine waarden van h, eene eindige waarde kan verkrijgen. Om in zoodanig geval de orde van aanraking te onderzoeken, zal men, of de assen der x en y onderling kunnen verwisselen, of een ander regthoekig coördinaten-stelsel invoeren.

Dat de orde van aanraking onafhankelijk is van de rigting der coördinaten-assen laat zich aldus aantoonen. Zij de lijn nq uit q naar een willekeurig punt van den boog Mn' getrokken. In den als oneindig klein ondersteld driehoek nqn' hebben de hoeken in q en n' eindige waarden, zoo dat er ook eene eindige betrekking bestaat tusschen de overstaande zijden $n'n$ en nq. Is nu nn' eene oneindig kleine van de m^e orde, dan zal zulks met de lijn nq evenzeer het geval moeten zijn, welke laatste de plaats van nn' vervangt, zoodra de rigting van nq evenwijdig aan de nieuwe as der y aangenomen is.

De voorgaande beschouwing leidt tevens tot de navolgende stelling.

Indien twee krommen elkander in eenig punt M *raken, en men uit een naburig punt* n *op eene dezer krommen genomen, eene lijn* nq *trekt, snijdende de gemeenschappelijke raaklijn onder een' eindigen hoek, zal de orde van raking één minder bedragen dan de rangorde van den oneindig kleinen afstand der punten* n, q; *de afstand* Mn *hierbij ondersteld zijnde eene oneindig kleine van de eerste orde.*

§ 119. Bij eene aanraking van de n^e orde tusschen twee kromme lijnen heeft nog deze bijzonderheid plaats, dat deze lijnen elkander in de nabijheid van het raakpunt tevens zullen snijden, ingeval n een even getal is. Want, nademaal de waarde van het ordinatenverschil $f(x+h)-F(x+h)$, bij zoodanige raking uitgedrukt wordt door

$$\frac{h^{n+1}}{2.3\ldots n+1}\left\{f_{n+1}(x+ih)-F_{n+1}(x+ih)\right\},$$

zoo ziet men terstond, dat hetzelve, voor de abscis $x+h$, een tegenovergesteld teeken bekomt dan voor de abscis $x-h$, indien namelijk h onbepaald afneemt, en dus de grootheid tusschen de haakjes meer en meer nadert tot hare limiet

$$f_{n+1}(x)-F_{n+1}(x.$$

Is n echter een oneven getal, dan zal het voorgaande verschil, vóór en na het raakpunt, hetzelfde teeken behouden. In het eerste geval moet dus eene dezer krommen gedeeltelijk binnen en gedeeltelijk buiten de andere gelegen zijn; in het andere geval daarentegen zal eene der krommen in de nabijheid van het raakpunt geheel binnen de andere gelegen zijn.

§ 120. Tot de aanraking der eerste orde behoort onder anderen de gewone raaklijn aan eenig punt der kromme. Zulks wordt, zoo noodig, aldus bevestigd:

Zij

$$y'-y=A(x'-x),$$

de vergelijking eener lijn gaande door het punt (x,y) eener gegevene kromme, dan is hier de voorwaarde der aanraking $\frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx}$; dus $A=\frac{dy}{dx}$, waardoor de bekende vergelijking der raaklijn ontstaat.

De kromtecirkel welken wij reeds in de XIV^{de} les hebben leeren kennen, vormt eene aanraking van de tweede orde in het punt waartoe hij behoort. Men heeft namelijk, x', y' de coördinaten van een onbepaald des cirkels noemende,

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)=R^2.$$

Deze vergelijking twee achtervolgende malen differentiërende, en tevens $x'=x$, $y'=y$, $\frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx}$ en $\frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$ stellende, zal men hieruit dezelfde waarden voor α, β, R, als in (§ 107) gevonden zijn, te voorschijn zien komen.

Even als nu de raaklijn de limiet is der door het raakpunt en een naburig punt getrokken snijlijnen, en even als de kromtecirkel, zoo als wij reeds ter aangehaalder plaatse hebben aangetoond, de limiet is der cirkels gaande door drie achtervolgende oneindig digt bij elkander genomen punten; even zoo mogen wij elke kromme, die met eene gegevene eene aanraking van de n^e orde heeft, beschouwen als de limiet van al de gelijksoortige krommen gaande door $n+1$ op oneindig kleinen afstand van elkander verwijderde punten der gegevene kromme. Ten gevolge van deze vereeniging

of ineensmelting van $n+1$ punten, wordt de bedoelde limietkromme, de *ineensmeltings-kromme* van de n^e orde genaamd. Zij voldoet ook werkelijk aan de opgegevene voorwaarden, die het bestaan eener aanraking van de n^e orde kenmerken. Immers laten $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$ de ordinaten, en $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ de abscissen zijn der $n+1$ punten, volgens welke twee kromme lijnen elkander snijden. Beschouwende nu elk dezer coördinaten x en y als eene functie eener derde onafhankelijke veranderlijke t, dan is het klaar, dat de verhoudingen

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}, \frac{\Delta^3 y}{\Delta t^3} \ldots \frac{\Delta^n y}{\Delta t^n}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}, \frac{\Delta^3 x}{\Delta t^3} \ldots \frac{\Delta^n x}{\Delta t^n}$$

voor elke der beide krommen dezelfde waarden in de $n+1$ snijpunten zullen verkrijgen, en zulks eveneens waar zal zijn van hare limieten

$$\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2} \ldots \frac{d^ny}{dt^n}, \qquad \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \ldots \frac{d^nx}{dt^n}.$$

Daar wijders, door x als onafhankelijke veranderlijke grootheid te nemen, de differentiaal-quotienten van y ten aanzien van x, in functie van de voorgaande kunnen uitgedrukt worden, zoo blijkt hieruit terstond, dat ook $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$, in het raakpunt (x, y) dezelfde waarden voor beide krommen bekomen, en er diensvolgens tusschen die krommen minstens eene raking van de n^e orde ontstaat.

§ 121. Wij hebben hiervoren (§ 119) reeds opgemerkt, dat bij eene raking van eene evene orde de beide krommen elkander gelijktijdig snijden. Nu is de raking des kromte-cirkels, gelijk wij gezien hebben, eene van de tweede orde. Derhalve zal ook deze cirkel rakende en tevens snijdende moeten zijn, even als bij eene raaklijn in het buigpunt eener kromme plaats vindt. Zie hier hoedanig men deze eigenschap voor den kromte-cirkel afzonderlijk betoogen kan.

Laten OM, $O'M'$, $O''M''$ (*fig.* 50) de kromtestralen in drie punten M, M', M'' eener kromme en $OO'O''$ een boog der ontwondene voorstellen.

Uit het punt O' de lijnen $O'M$, $O'M''$ trekkende, zoo volgt onmiddelijk uit de eigenschap der ontwondene (§ 113),

$$M'O' = MO + \text{boog } OO' > MO'$$

en $$M'O' = M''O'' - \text{boog } O'O'' < M''O'.$$

De kromte-cirkel uit O' met $O'M'$ als straal beschreven zal zich dus in de nabijheid van het punt M', gedeeltelijk *boven* het gedeelte MM', en gedeeltelijk *beneden* het gedeelte $M'M''$ der kromme uitstrekken, en deze alzoo in het punt M' moeten snijden. Hierdoor onderscheidt zich dan ook deze cirkel van alle andere in dat punt rakende cirkels, welker middelpunten insgelijks op de normaal $M'O'$ gelegen zijn, doch die, of geheel binnen, of geheel boven de kromme gelegen zijn, en tusschen welke de kromte-cirkel een overgang daarstelt, hetgeen tevens tot verklaring strekt van de naauwere ineensmelting van dien cirkel met het element der kromme, dan van eenige der overige genoemde cirkels, die eeniglijk door twee oneindig dîgt bij elkander gelegen punten gaande, ook slechts eene raking van de eerste orde vormen.

§ 122. In sommige kromme lijnen kunnen echter punten aanwezig zijn, alwaar de kromte-cirkel insgelijks eene bloote aanraking zonder snijding vertoont. Deze bijzonderheid heeft alleen dan plaats, bijaldien in dat punt tevens $\frac{d^3y}{dx^3}$ dezelfde waarde verkrijgt voor de kromme en voor den cirkel, waaruit dan ook eene nog naauwere aanraking, namelijk eene van de derde orde ontstaat. Bij de gewone raaklijn zien wij hetzelfde gebeuren, wanneer zij door een buigpunt gaat, alwaar $\frac{d^2y}{dx^2}$ nul wordt, hetgeen bij de vergelijking der regte lijn, $y' = Ax' + B$ mede het geval is. De raking verandert alsdan in eene van de tweede orde, welke tevens eene snijding ten gevolge heeft.

Bij den kromte-cirkel zal de aangevoerde omstandigheid te weeg gebragt worden, indien men hem als de limiet beschouwt van eenen door vier op elkander volgende punten getrokken cirkel. Men zal de algemeene vergelijking

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = R^2,$$

in zoodanig geval drie achtereenvolgende malen hebben te differentiëren, en alzoo het navolgende stelsel vergelijkingen verkrijgen:

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx} + x - \alpha = 0,$$

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} + 1 = 0,$$

$$(y-\beta)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Hierin zullen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ in het raakpunt (x, y) dezelfde waarden hebben als die, welke de vergelijking der gegevene kromme oplevert.

Daar nu drie vergelijkingen voldoende zijn ter bepaling der drie grootheden α, β, R, ziet men, dat de vier voorgaande vergelijkingen alleen dan met elkander kunnen overeenstemmen, bijaldien er tusschen de differentiaal-quotienten van de eerste, tweede en derde orde eene bijzondere betrekking bestaat, welke men uit de beide laatste vergelijkingen kan afleiden, en waarvoor men zal vinden:

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3} = 3\frac{dy}{dx}\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Uit het in § 121 gegeven betoog laat zich nu gemakkelijk opmaken, dat de hier bedoelde naauwere raking nimmer zal kunnen plaats vinden in die gedeelten eener kromme, alwaar de kromtestralen steeds toe- of afnemende zijn; maar dat de mogelijkheid daartoe eeniglijk bestaat in kromme lijnen, van zoodanigen vorm dat de kromtestraal in een der punten zijne grootste of kleinste waarde bereikt; eene omstandigheid welke dan ook bevestigd wordt, door het differentiëren der algemeene waarde van den kromtestraal, ten einde naar de bekende regels, de voorwaarde te bepalen, welke deze lijn tot een maximum of minimum maken. De vergelijking

$$R = \pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

geeft te dien einde,

$$\frac{dR}{dx} = \pm\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left\{3\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3}\right\}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = 0,$$

waaruit, omdat de eerste factor niet nul kan worden, dezelfde betrekking als (1) tusschen de differentiaal quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ voortvloeit. De beoordeeling of hier maximum of minimum plaats heeft, zal het best kunnen geschieden met behulp der in functie van x of y berekende waarde van R, voor eenig onbepaald punt der kromme. Reeds is in § 108 gebleken, dat bij elke der drie kegelsneden de kromtestraal in de toppen een maximum of minimum wordt, en

er alzoo in elk dezer punten eene raking van de derde orde met den kromte-cirkel ontstaat. Men zal zich ook gemakkelijk kunnen verzekeren, dat aan de vergelijking (1) werkelijk door de waarde der differentiaal-quotienten in die punten, voldaan wordt. Er blijft echter nog overig om te beslissen, of in elk dezer punten de kromte-cirkel zich buiten de kromme uitstrekt en dus deze omvat, dan of het omgekeerde zal plaats vinden. Hiertoe merke men op, dat bij eene raking der derde orde, het ordinaten-verschil

$$f(x+h)-F(x+h)=\frac{h^4}{2.3.4}\left\{f_4(x+ih)-F_4(x+ih)\right\},$$

voor eene oneindig kleine waarde van h, hetzelfde teeken verkrijgt als het verschil $f_4(x)-F_4(x)$. De kromme $y=f(x)$ zal dus de rakende kromme $y=F(x)$ al dan niet omvatten, naar dat het laatste verschil, dat is het verschil der waarden van $\frac{d^4y}{dx^4}$ in beide krommen, positief of negatief is. Om zulks op de ellips van toepassing te maken, heeft men (§ 108)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3b^6x}{a^4y^5},$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{3b^6}{a^4}\left(\frac{5b^2-4y^2}{y^7}\right).$$

In het uiteinde der halve kleine as b zal men hebben

$$\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b}{a^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=0,\quad \frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{3b}{a^4}.$$

De waarde van $\frac{d^4y}{dx^4}$ in den kromte-cirkel is te vinden door differentiatie der hiervoren verkregene vergelijking,

$$(y-\beta)\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{3dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

gevende
$$(y-\beta)\frac{d^4y}{dx^4}+4\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}+3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0,$$

of, na het elimineren van $y-\beta$,

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{4\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3}{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

welke uitdrukking, omdat in het bedoelde punt der ellips $\frac{dy}{dx}=0$ wordt, zich herleidt tot

$$\frac{d^4y}{dx^4}=3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3,$$

en hierin de opgegevene waarde van $\frac{d^2y}{dx^2}$ substituerende, komt er voor den cirkel

$$\frac{d^4y}{dx^4}=-\frac{3b^3}{a^6}.$$

Diensvolgens zal, omdat $b < a$ ondersteld is,

$$f_4(x)-F_4(x)=-\frac{3b}{a^4}+\frac{3b^3}{a^6}=\frac{3b}{a^4}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right),$$

een negatief teeken hebben, waaruit wij besluiten, dat de kromtecirkel aan het uiteinde der kleine as, de ellips omvat, en er in het uiteinde der groote as blijkbaar het tegenovergestelde zal plaats vinden.

Bij de parabool en de hyperbool zal men, uithoofde de raaklijn in den top loodregt op de as der x staat, x en y met elkander behooren te verwisselen, om de voorgaande formule te kunnen toepassen. Dat onderzoek zij den lezer overgelaten.

§ 123. Hervatten wij, na deze uitweiding over den kromtecirkel, de algemeene beschouwing der kromlijnige aanrakingen, waaromtrent nog het een en ander valt op te merken.

Neemt men $n+1$ punten op den omtrek eener kromme, dan kan men een oneindig aantal kromme lijnen van verschillende soort door die $n+1$ punten laten gaan. De vergelijking van elke dezer krommen zal noodzakelijk $n+1$ standvastigen bevatten, die uit de bekende waarden der coördinaten van de $n+1$ snijpunten kunnen afgeleid worden. Laat men nu die punten in elkander smelten, dan ontstaat hieruit tusschen de beide krommen eene raking van de n^e orde (§ 120), en de $n+1$ standvastigen worden alsdan bepaald door de voorwaarden, dat voor de abscis x van het raakpunt, de ordinaat y en hare afgeleide funtien tot die der n^e orde ingesloten, voor beide krommen, gelijke waarden verkrijgen. Zij $y'=F(x')$ de vergelijking der ineensmeltings-kromme, bevattende $n+1$ standvastigen, dan zal men de gegevene vergelijking n achtereenvolgende malen ten aanzien van x' moeten differentiëren, en hierbij tevens y', x', door y, x, vervangen. Men verkrijgt alsdan een

stelsel van $n+1$ vergelijkingen, die tot bepaling der standvastigen kunnen leiden, en zoo deze in de aangenomene vergelijking slechts in de eerste magt voorkomen, zal men voor elke standvastige slechts eene enkele waarde verkrijgen. Bij de bepaling der standvastigen, die tot den kromtecirkel behooren, heeft men hiervan reeds een voorbeeld gezien (§ 107).

De eenvoudigste kromme lijnen, die men tot ineensmeltings krommen gebruiken kan, zijn de parabolische van verschillende orden, begrepen in den algemeenen vorm

$$y' = A_0 + A_1 x' + A_2 x'^2 \;.\;\;.\;\;. + A_n x'^n,$$

en welke, in het algemeen, voor geene hoogere orde van raking met eene gegevene kromme $y = f(x)$ vatbaar zijn, dan door den hoogsten exponent van x wordt aangewezen.

De $n+1$ standvastigen in deze vergelijking voorkomende, laten zich uit de hiervoren vermelde voorwaarden aldus bepalen. Daar namelijk voor $x' = x$, y' in y moet overgaan, mag men aan de vorige vergelijking ook dezen vorm geven.

$$y' = y + a_1(x'-x) + a_2(x'-x)^2 \;.\;\;.\;\;. + a_n(x'-x)^n.$$

Deze vergelijking nu n achtereenvolgende malen differentiërende, en in aanmerking nemende, dat voor $x' = x$,

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx},\qquad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \;.\;\;.\;\;. \frac{d^ny'}{dx'^n} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

vindt men op die wijze,

$$a_1 = \frac{dy}{dx},\quad a_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2},\quad a_3 = \frac{1}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3},$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{2.3.n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\qquad a_n = \frac{1}{2.3\ldots n}\cdot\frac{d^ny}{dx^n}\;.$$

Derhalve

$$y' = y + \frac{dx}{dx}(x'-x) + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(x'-x)^2 + \,.\,.\frac{1}{2.3..n}\frac{d^ny}{dx^n}(x'-x)^n \;.(2)$$

welke uitdrukking men insgelijks had kunnen afleiden uit de ontwikkeling van $y' = F(x) = F\big(x + (x'-x)\big)$, volgens de reeks van Taylor.

§ 124. In het bijzonder geval van $n = 1$, verkrijgt men eene raking der eerste orde, gevende voor de gewone raaklijn, de bekende vergelijking

$$y' - y = \frac{dy}{dx} (x' - x),$$

Voor de gewone parabolische rakings-krommen, waarbij $n = 2$ wordt, verkrijgt men de vergelijking,

$$y' = y + \frac{dy}{dx} (x' - x) + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} (x' - x)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ten einde den stand dezer kromte-parabool zoo mede haren parameter uit de vergelijking $y = f(x)$ der gegevene kromme te bepalen, zullen wij de, coördinaten van den top α, β, en den parameter p noemende, de as der parabool evenwijdig aan de as der y mogen aannemen; in het tegenovergestelde geval toch zou de vergelijking der parabool nog eene vierde standvastige moeten bevatten, die tot bepaling van den hoek der beide genoemde assen zou dienen. Zij nu *N R S* (*fig.* 51) de rakende parabool in het punt *M* eener kromme *A M M'*; *R* de top en *R B* de as der parabool. De coördinaten α en β moeten voldoen aan de vergelijking (3) en daarenboven aan de vergelijking

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} + (x' - x) \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

dewijl de raaklijn in den top evenwijdig aan de as der x loopt. Hieruit ontstaan alzoo de vergelijkingen,

$$\beta - y = \frac{dy}{dx} (\alpha - x) + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} (\alpha - x)^2,$$

$$\frac{dy}{dx} + (\alpha - x) \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

gevende ter bepaling van α en β,

$$x - \alpha = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{dydx}{d^2y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en $$\frac{\beta - y}{\alpha - x} = \frac{1}{2} \frac{dy}{dx} \quad \text{of} \quad y - \beta = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wijders is volgens de bekende eigenschap de parabool

$$(\alpha - x)^2 = p(\beta - y) = \frac{p}{2} (\alpha - x) \frac{dy}{dx}.$$

Derhalve $$p = \frac{2(\alpha - x)}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

De vergelijkingen (4) en (5) strekken ter bepaling van de meetkunstige plaats der toppen van de rakende parabolen der gegevene kromme. Met behulp der waarde van p kunnen zij insgelijks dienen om de meetkunstige plaats te vinden van de brandpunten dezer parabolen. Men verkrijgt alsdan de zoo genaamde brandlijn of catacaustische kromme, ontstaande uit de snijdingen der achtervolgende terug-gekaatste lichtstralen, welke ondersteld worden evenwijdig aan de as der ordinaten op den omtrek der gegevene kromme te vallen.

De coördinaten van het brandpunt zijn blijkbaar α en $\beta' = \beta - \frac{1}{4}p$. Derhalve zal de betrekking tusschen α en β', dat is de vergelijking der brandlijn, kunnen bepaald worden door middel der vergelijkingen

$$x - \alpha = \frac{dy\,dx}{d^2y},$$

$$y - \beta' = \frac{1}{2}\frac{\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{dy^2 - dx^2}{d^2y}\right).$$

Voor de toepassing dezer formules verwijzen wij den lezer naar de theorie der brandlijnen, voorkomende in onze *Wiskundige Mengelingen*, uitgegeven in den jare 1823, alwaar dezelfde formules uit eene eenigzins verschillende analysis afgeleid zijn.

§ 125. Behalve de parabolische lijnen kan men elke andere willekeurige kromme lijn $y = F(x)$ van eene bepaalde soort eene raking van zekere orde met eene gegevene kromme $y = f(x)$ doen ondergaan. Bevat de eerstgemelde vergelijking p standvastigen, dan zal de raking van de eerste, tweede, enz. of van de m^e orde zijn, naardat er slechts twee, drie enz. of $m+1$ der p vergelijkingen $F(x) = f(x)$, $F_1(x) = f_1(x)$, $F_2(x) = f_2(x)$.. $F_{p-1}(x) = f_{p-1}(x)$, ter bepaling der standvastigen gebruikt zijn, waardoor dus aan $p-m-1$ standvastigen willekeurige waarden kunnen gegeven worden. De raking zal van de hoogste, dat is van de $(p-1)^e$ orde worden, zoodra geene der p standvastigen onbepaald blijft, als wanneer de kromme in de ineensmeltings of *osculerende* kromme overgaat, terwijl zij, in elk ander geval, eene rakings-kromme heet van de m^e orde, indien er $p-m-1$ standvastigen onbepaald gebleven zijn, zoo dat men van dezelfde soort van krommen een oneindig

aantal zal kunnen aanwijzen, die met de gegevene kromme slechts eene raking van de m^e orde daarstellen. Aldus zal men bijv. uit de vergelijking des cirkels

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2,$$

door haar slechts eenmaal te differentiëren, niet het vereischte aantal vergelijkingen bekomen, ter bepaling van α, β, R in functie van x en y, maar zal men hierbij aan R willekeurige waarden kunnen geven. Het aantal rakende cirkels is dus onbepaald, en al hunne middelpunten liggen op de normaal van het raakpunt, vermits de coördinaten α, β tevens moeten voldoen aan de vergelijking

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+x-\alpha=0.$$

§ 126. Uit het voorgaande volgt nu tevens, dat men van twee elkander rakende krommen $y=f(x)$, $y=F(x)$ de orde van raking bepalen kan, door na te gaan hoe vele der achtervolgende afgeleide functien, voor de abscis $x=x_1$ tot het raakpunt behoorende, dezelfde waarden in beide kromme lijnen verkrijgen. De laatste dezer functien zal dan, door hare rangorde, die der raking doen kennen.

Men neme tot voorbeeld twee parabolische krommen $y=x^n$, $y=x^{n+1}$, elkander beide in den oorsprong rakende, zoodat $x=0$ de abscis van het raakpunt voorstelt.

De voorgaande vergelijkingen $n-1$ malen achtervolgens differentiërende, zoo blijkt terstond, dat $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ in beide krommen voor $x=0$ verdwijnen, en alzoo dezelfde waarden verkrijgen, terwijl die gelijkheid ophoudt voor het n^e differentiaal quotient. Deze twee krommen hebben gevolgelijk eene raking van de $(n-1)^e$ orde. Voor $n=\frac{3}{2}$ daarentegen zal de raking slechts van de eerste orde zijn, vermits $\frac{d^2y}{dx^2}$ in de eerste kromme oneindig, en in de tweede nul wordt, voor $x=0$.

In vele gevallen zal het echter gemakkelijker zijn te onderzoeken tot welke rangorde van oneindig kleinen, het verschil $f(x_1+h)-F(x_1+h)$ behoort, in de onderstelling dat h eene oneindig kleine van de eerste orde is, waardoor de achtervolgende differentiatien kunnen vermeden worden.

In ons vorig voorbeeld bedraagt dat verschil $h^n-h^{n+1}=h^n(1-h)$,

zijnde eene oneindig kleine van de n^e orde. De raking is dus van de $(n-1)^e$ orde.

Nemen wij tot een ander voorbeeld de gewone parabool $y^2 = px$, en de kromte-cirkel in haren top, tot vergelijking hebbende

$$y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2,$$

als zijnde de kromte-straal in den top $= \frac{1}{2}p$ (§ 108).

Daar de raaklijn in dat punt met de as der y overeenkomt, zal men hier de assen moeten verwisselen (§ 118), waardoor de vergelijkingen der beide krommen overgaan in

$$y = \frac{x^2}{p}, \quad \text{en} \quad y = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - x^2)}.$$

Men heeft dus voor het ordinaten-verschil,

$$f(h) - F(h) = \frac{h^2}{p} - \frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{4h^2}{p^2}\right)}\right).$$

De wortel-grootheid in eene reeks ontwikkelende, en zich tot het benedenste teeken bepalende, vermits in den kromte-cirkel blijkbaar alleen de kleinste ordinaat in aanmerking kan komen, volgt hieruit

$$f(h) - F(h) = \frac{h^2}{p} - \frac{p}{2}\left\{\frac{2h^2}{p^2} + \frac{2h^4}{p^4} + \text{enz.}\right\},$$

of $$f(h) - F(h) = -\frac{h^4}{p^3} - \text{enz.}$$

Dat verschil eene oneindig kleine van de vierde orde zijnde, zoo blijkt terstond, dat de kromte-cirkel in den top der parabool, eene raking van de derde orde heeft, even als reeds vroeger gebleken was (§ 123). Het negatieve teeken, waarmede het gevonden verschil aangedaan is, leert ons daarenboven, dat die kromte-cirkel geheel *binnen* de parabool gelegen is.

ZEVENTIENDE LES.

Over de omhullende kromme lijnen.

§ 127. Wanneer men aan eene der standvastige grootheden, die in de vergelijking van eenige kromme lijn voorkomen, eene veranderlijke waarde toekent, zullen hieruit kromme lijnen ontstaan, die, of in ligging, of in afmetingen, of ook in beide opzigten tegelijk, van elkander verschillend kunnen zijn, hoezeer zij in elk dezer drie gevallen steeds tot dezelfde soort van krommen behooren. Zij bijv.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

de vergelijking eens cirkels, en laat hierin a op eene onafgebroken wijze veranderen, dan verkrijgt men eene reeks aan elkander gelijke cirkels, die eeniglijk door de ligging van hun middelpunt van elkander onderscheiden zijn, dewijl dat punt ten gevolge der verandering van de abscis a, zich volgens eene regte lijn evenwijdig aan de as der x heeft verplaatst. Stelt men daarenboven b gelijk aan eene gegevene functie van a, zoodat b te gelijk met a volgens de aangenomen betrekking veranderlijk is, dan verkrijgt men eene andere reeks van gelijke cirkels, welker middelpunten nu allen zullen gelegen zijn op den omtrek eener zekere kromme tot vergelijking hebbende $b=\varphi(a)$.

Men kan echter nog veronderstellen, dat ook de straal r, bij de beweging des middelpunts, volgens eene bepaalde wet verandere, en in grootte steeds overeenkome met de ordinaat eener kromme $r=f(a)$, behoorende tot de abscis a.

De hieruit ontstaande cirkels, welker middelpunten op eene regte of kromme lijn liggen, zullen alsdan ook in grootte van elkander onderscheiden zijn. In elk dezer gevallen nogtans zal men de grootheid a in de vergelijking des cirkels, als de onafhankelijke veranderlijke mogen beschouwen, vermits die vergelijking bij den aangenomen veranderlijken toestand dezer kromme, op eene algemeene wijze aldus kan voorgesteld worden

$$(x-a)^2+(y-\varphi'a))^2=(f(a))^2.$$

§ 128. Dezelfde beschouwing op eene willekeurige kromme lijn

uitstrekkende, zal men hare vergelijking kunnen schrijven onder den vorm

$$F(x, y, a) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin de grootheid a de veranderlijke parameter van de opvolgende kromme lijnen genaamd wordt.

Laat men nu a steeds aangroeijen met het standvastige verschil h, dan zullen de gegevene kromme, en die, welke door de verandering van a in $a+h$ ontstaat, elkander in een of meer punten snijden, welker coördinaten bepaald worden door de waarden van x, y, die aan de beide vergelijkingen

$$F(x, y, a) = 0, \qquad F(x, y, a+h) = 0,$$

voldoen.

Op gelijke wijze kan men de overeenkomstige snijpunten van al de achtereenvolgende krommen bepalen, en vervolgens door regte lijnen met elkander verbinden, waaruit een veelhoek zal ontstaan. Neemt men echter h al kleiner en kleiner, dan nadert die veelhoek meer en meer tot hare limiet, welke in eene onafgebroken kromme lijn overgaat, de meetkunstige plaats voorstellende van al de oneindig digt bij elkander liggende snijpunten der opvolgende krommen, en welke den naam van *omhullende* of *omsluitende* kromme (*courbe d'enveloppe*) draagt, uit hoofde zij tevens de eigenschap bezit van al de krommen, begrepen in de vergelijking $F(x, y, a) = 0$, gelijktijdig te raken.

Voor elke gegevene waarde van a zullen de coördinaten der snijpunten van twee oneindig digt bij elkander liggende krommen te bepalen zijn, door de oplossing van het stelsel vergelijkingen

$$F(x, y, a) = 0, \quad F(x, y, a+da) = 0,$$

als zijnde het eindige verschil h thans in da overgegaan.

Daar echter de tweede dezer vergelijkingen blijkbaar niets anders beteekent, dan de eerste vermeerderd met hare differentiaal, eeniglijk ten opzigte van a genomen, laat zij zich ook aldus voorstellen:

$$F(x, y, a) + \frac{d.F(x, y, a)}{da} da = 0,$$

zoodat, stellende kortheidshalve U voor de functie $F(x, y, a)$, de ten aanzien van x en y op te lossen vergelijkingen zich herleiden tot deze:

$$U = 0, \quad \frac{dU}{da} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Om echter de vergelijking der omhullende kromme te bekomen, zal men eene betrekking tusschen x en y hebben te zoeken, die van den veranderlijken parameter a geheel onafhankelijk zij, en dus voor alle opvolgende snijpunten geldt, en hiertoe zal men blijkbaar kunnen geraken door het elimineren van de grootheid a tusschen de vergelijkingen (2). Dat deze kromme al de overigen; die uit de verandering van a ontstaan, gelijktijdig zal raken, hiervan kan men zich gemakkelijk aldus overtuigen. Men beschouwe drie dezer op elkander volgende krommen A_1, A en A', overeenstemmende met $a - da$, a en $a + da$, dan is het klaar, dat A door A_1 en A' in twee oneindig digt bij elkander liggende punten gesneden wordt; de boog tusschen die punten een element van de kromme A vormende, zoo zal de omhullende kromme, als de meetkunstige plaats dezer punten, noodzakelijk een element met de kromme A gemeen hebben, waardoor dus eene raking van de eerste orde zal ontstaan; en daar zulks evenzeer voor elk der opvolgende krommen geldt, is hierin het betoog der aangevoerde eigenschap gelegen.

§ 129. Wij zullen thans eenige voorbeelden laten volgen tot nadere toelichting der voorgaande theorie.

1°. *De omhullende kromme te bepalen van alle cirkels van gelijken straal, welker middelpunten op eene gegevene lijn liggen?*

Laat $$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

de vergelijking des cirkels, en

$$y = \alpha x + \beta$$

die der regte lijn zijn.

De coördinaten der opvolgende middelpunten zijn aan elkander verbonden door de betrekking

$$b = \alpha a + \beta, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

waaruit volgt $$\frac{db}{da} = \alpha.$$

De vergelijking des cirkels ten aanzien van a differentiërende, komt er

$$x - a + (y - b)\frac{db}{da} = 0,$$

of $$x - a = -\alpha(y - b). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Om nu de vergelijking der begeerde kromme te verkrijgen, zal men a en b uit de vergel. (3), (4) en (5) hebben te verdrijven. Te

dien einde substituere men de waarde van $x-a$ in (3), waardoor deze overgaat in

$$y-b=\pm\frac{r}{\sqrt{(1+a^2)}},$$

dus $$a(x-a)=\mp\frac{ra^2}{\sqrt{(1+a^2)}}.$$

Deze twee vergelijkingen van elkander aftrekkende, vindt men terstond met behulp van (4),

$$y-ax-\beta=\pm r\sqrt{(1+a^2)},$$

of $$y=ax+\beta\pm r\sqrt{(1+a^2)}.$$

De omhullende kromme bestaat dus hier in een stelsel regte lijnen, evenwijdig aan de lijn der middelpunten, en op afstanden $\pm r$ van deze laatste verwijderd, zoodat al de verschillende cirkels tusschen die beide lijnen besloten zijn, hetgeen trouwens gemakkelijk *a priori* was in te zien.

Neemt men de lijn der middelpunten tot as der x aan, dan wordt $a=0$ en $\beta=0$, en de gevonden vergelijking herleidt zich tot

$$y=\pm r.$$

Onderstellen wij thans, dat al de middelpunten gelegen zijn op den omtrek eens cirkels, tot vergelijking hebbende

$$x^2+y^2=R^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

De coördinaten a en b der middelpunten zullen nu aan deze vergelijking moeten voldoen, waaruit volgt

$$a^2+b^2=R^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

hetgeen de vergelijking der zich snijdende cirkels doet overgaan in

$$(x-a)^2+\left(y-\sqrt{(R^2-a^2)}\right)^2=r^2,$$

zoodat deze thans van den enkelen parameter a afhangt. Het zal echter voor het elimineren van a tusschen de laatste vergelijking en hare afgeleide ten opzigte van a, verkieslijk zijn, haren oorspronkelijken vorm

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

te behouden, en hierbij b als eene bekende functie van a te beschouwen, even als wij zulks in het voorgaande geval gedaan

hebben. Men heeft alsdan, differentiërende ten opzigte van a,

$$x - a + (y - b)\frac{db}{da} = 0,$$

of, omdat uit (7) volgt, $\frac{db}{da} = -\frac{a}{b}$,

$$x = \frac{a}{b}y, \qquad \text{dus } b = \frac{ay}{x}.$$

Na substitutie dezer waarde van b in (7) en (8), komt er

$$\frac{a}{x}\sqrt{(x^2 + y^2)} = \pm R,$$

$$\left(\frac{a-x}{x}\right)\sqrt{(x^2 + y^2)} = \pm r.$$

Derhalve $$x^2 + y^2 = (R \pm r)^2,$$

zijnde de vergelijking van twee, met den gegeven cirkel, concentrieke cirkels, tusschen welke al de veranderlijke cirkels besloten zijn.

§ 130. Het valt niet moeijelijk op eene algemeene wijze te betoogen dat, welke ook de kromme lijn zij, waarop zich de middelpunten der cirkels bevinden, de omhullende kromme steeds aan die kromme evenwijdig is.

Laten namelijk de coördinaten a en b, voorkomende in de vergelijking des cirkels

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

aan elkander verbonden zijn door de vergelijking

$$b = \varphi(a),$$

dan volgt uit (9)

$$x - a + (y-b)\frac{db}{da} = 0,$$

dus $$(y-b)\sqrt{\left(1 + \frac{db^2}{da^2}\right)} = \pm r,$$

en $$(x-a)\sqrt{\left(1 + \frac{db^2}{da^2}\right)} = \mp r\frac{db}{da}.$$

Zij s de lengte van een willekeurigen boog der kromme $b = \varphi(a)$ gerekend van eenig bepaald punt, dan heeft men

$$ds^2 = da^2 + db^2,$$

en hierdoor veranderen de beide voorgaande vergelijkingen in

$$\left.\begin{aligned} y-b &= \pm r\frac{da}{ds}, \\ x-a &= \mp r\frac{db}{ds}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Beschouwt men nu de coördinaten x en y van eenig punt der omhullende kromme, als functiën der abscis a van het middelpunt des rakenden cirkels, dan zal men de vergelijkingen (10) ten aanzien van s als functie van a mogen differentiëren, en hierbij gemakshalve ds standvastig aannemen, in welke onderstelling men verkrijgt,

$$\frac{dy}{ds}-\frac{db}{ds} = \pm r\frac{d^2a}{ds^2},$$
$$\frac{dx}{ds}-\frac{da}{ds} = \mp r\frac{d^2b}{ds^2}.$$

Vermenigvuldigende thans de eerste dezer vergelijkingen met da en de tweede met db, dan geeft het verschil der producten, uit hoofde van

$$da\,d^2a + db\,d^2b = 0,$$
$$dy\frac{da}{ds} - dx\frac{db}{ds} = 0.$$

Derhalve $$\frac{dy}{dx} = \frac{db}{da}.$$

ten blijke dat de raaklijn aan het punt (x, y) der omhullende kromme steeds evenwijdig loopt aan die van het overeenkomstige punt (a, b) der gegevene kromme.

De vergelijking

$$x-a+(y-b)\frac{db}{da} = 0,$$

of $$y-b = -(x-a)\frac{dx}{dy},$$

toont daarenboven aan, dat de lijn, die de overeenkomstige punten (x, y) en (a, b) vereenigt, eene normaal van beide krommen is, zoodat elk punt der omhullende kan bepaald worden door op die normaal, ter wederzijde van het punt (a, b), een afstand gelijk aan den straal r uit te zetten. Men verkrijgt hierdoor de beide evenwijdige krommen, welke al de cirkels omsluiten, wier middelpunten op de gegevene kromme gelegen zijn.

2°. *De omhullende kromme te vinden van alle ellipsen, voor welke de som der beide assen eene standvastige waarde behoudt, en die allen hetzelfde middelpunt hebben.*

De gegevene vergelijkingen zijn hier

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$a+b=c.$$

De eerste ten opzigte van a differentiërende, komt er op grond der aangenomen betrekking tusschen a en b,

$$\frac{x^2}{a^3}-\frac{y^2}{b^3}=0,$$

waaruit volgt

$$\frac{x^2}{a^2}:\frac{y^2}{b^2}=a:b,$$

$$\frac{x^2}{a^2}:1=a:c,\qquad \frac{y^2}{b^2}:1=b:c,$$

of

$$\frac{x^2}{c^2}=\frac{a^3}{c^3},\qquad \frac{y^2}{c^2}=\frac{b^3}{c^3}.$$

Derhalve

$$\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

voor de vergelijking der omhullende kromme, zijnde eene hypocycloide, voortgebragt door eenig punt van een cirkel-omtrek, rollende tegen den binnen omtrek eens anderen cirkels van eenen viermaal grooteren straal c.

§ 131. Men kan eene regte lijn zoodanig doen bewegen in een vlak, dat zij aan eene bepaalde voorwaarde blijft voldoen, en als dan vragen: welke kromme zij in hare opvolgende standen steeds raakt, dat is met andere woorden, de omhullende kromme te bepalen, die de meetkunstige plaats voorstelt der snijpunten van al deze lijnen.

Stel bijv. dat de lijn zich in dier voege tusschen twee regthoekige assen beweegt, dat de som der afstanden tusschen den oorsprong en hare snijpunten met die assen standvastig blijve.

Zij de vergelijking der bewegende lijn,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

dan heeft men hierbij te voegen de voorwaarde

$$a+b=c.$$

Differentiërende ten aanzien van a, vindt men, met inachtneming, dat $\frac{db}{da} = -1$ is,

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 0,$$

en hieruit volgt verder

$$\frac{x}{a} : \frac{y}{b} = a : b,$$

dus $\frac{x}{a} : 1 = a : c$, en $\frac{y}{b} : 1 = b : c$,

of $cx = a^2, \quad cy = b^2,$

$$\sqrt{cx} + \sqrt{cy} = a + b = c,$$

$$\sqrt{\frac{x}{c}} + \sqrt{\frac{y}{c}} = 1,$$

voor de vergelijking der begeerde kromme, die blijkbaar een parabool zal zijn.

Men zal overigens gemakkelijk vinden, dat de as der parabool overeenkomt met de lijn die den hoek der coördinaten-assen midden door deelt, en de top op eenen afstand $\frac{c}{2\sqrt{2}}$ uit den oorsprong verwijderd is, terwijl de parameter tot waarde heeft $c\sqrt{2}$.

Het behoeft ook naauwelijks opgemerkt te worden, dat de voorgaande uitkomsten evenzeer gelden, bijaldien de beide assen elkander onder eenen willekeurigen hoek snijden, mits x en y alsdan de scheefhoekige coördinaten van eenig punt der kromme aanduiden. In elk geval zullen die assen tevens raaklijnen aan de parabool, en de afstand van elk der raakpunten tot aan den oorsprong gelijk aan c zijn.

§ 132. Onderzoeken wij thans welke de omhullende kromme zal zijn, bijaldien de regte lijn zich in dier voege tusschen twee regthoekige assen beweegt, dat de afstand tusschen hare snijpunten met die assen dezelfde lengte c behoudt, zoodat al de hieruit ontstaande regthoekige driehoeken dezelfde hypothenusa verkrijgen.

Stellende wederom voor de vergelijking der veranderlijke lijn,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

dan komt hierbij de voorwaarde

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

gevende $\frac{db}{da} = -\frac{a}{b}.$

De eerste vergelijking ten opzigte van a differentiërende, heeft men

$$\frac{x}{a^2}-\frac{y}{b^2}\times\frac{a}{b}=0,$$

of

$$\frac{x}{a^3}=\frac{y}{b^3},$$

dus

$$\frac{x}{a}:\frac{y}{b}=a^2:b^2,$$

waaruit

$$\frac{x}{a}:1=a^2:c^2,$$

$$\frac{y}{b}:1=b^2:c^2,$$

en

$$c^2x=a^3,\qquad c^2y=b^3,$$

$$\sqrt[3]{\frac{x}{c}}=\frac{a}{c},\qquad \sqrt[3]{\frac{y}{c}}=\frac{b}{c}.$$

Derhalve

$$\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

zijnde dezelfde kromme als, in het voorbeeld der ellipsen met veranderlijke assen, hiervoren verkregen is (*).

§ 133. Laat men eene lijn zoodanig bewegen, dat zij steeds raaklijn zij aan eenige gegeven kromme, dan is het duidelijk, dat deze laatste in dat geval de omhullende kromme zelve voorstelt, hetwelk ook, door de algemeene theorie, aldus bevestigd wordt.

Zij $y=\varphi(x)$ de vergelijking der gegevene kromme, en laten a, b de coördinaten van het raakpunt zijn, dan heeft de veranderlijke lijn tot vergelijking

$$y-b=(x-a)\frac{db}{da},$$

of

$$y-\varphi(a)=(x-a)\,\varphi_1(a),$$

waaruit, door differentiatie ten aanzien van a volgt,

$$-\varphi_1(a)=(x-a)\,\varphi_2(a)-\varphi_1(a),$$

of

$$x-a=0.$$

(*) In het IIe deel, bladz. 573 der *Verzameling van Voorstellen*, uitgegeven door het wiskundig genootschap: *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven*, vindt men eene andere oplossing van hetzelfde problema door Bangma gegeven, en waarin tevens eenige opmerkelijke eigenschappen der omhullende kromme zijn aangewezen.

Eliminerende a tusschen deze en de voorgaande vergelijking, verkrijgt men voor die der omhullende kromme

$$y - \varphi(x) = 0, \quad \text{of} \quad y = \varphi(x),$$

zijnde dezelfde als de vergelijking der gegevene kromme.

Indien echter de bewegende lijn overal normaal op de kromme $y = \varphi(x)$ moet zijn, dan heeft men voor de vergelijking dezer lijn, gaande door het punt (a, b),

$$x - a + (y - \varphi(a))\,\varphi_1(a) = 0,$$

en voor hare afgeleide ten opzigte van a,

$$-1 - (\varphi_1(a))^2 + (y - \varphi(a))\,\varphi_2(a) = 0,$$

waaruit volgt

$$y - \varphi(a) = \frac{1 + (\varphi_1(a))^2}{\varphi_2(a)} = \frac{da^2 + db^2}{d^2b},$$

$$x - a = -\frac{db}{da} \cdot \frac{da^2 + db^2}{d^2b}.$$

Deze uitkomsten overeenstemmende met de in de *XIV*[e] *Les* gevondene formules ter bepaling van de ontwondene eener kromme, zoo besluit men hieruit terstond, dat de kromme, welke door de verschillende normalen geraakt wordt, of de omhullende dezer elkander snijdende lijnen, geene andere dan de ontwondene der gegevene kromme kan zijn, zoo als zulks ook uit den aard der zake te verwachten was.

ACHTTIENDE LES.

Differentiatie van functiën van twee of meer onafhankelijke veranderlijke grootheden.

§ 134. Indien er een aantal van p vergelijkingen gegeven zijn, tusschen $p+n$ onbekende grootheden, zal men geene genoegzame gegevens bezitten, om elke dezer onbekenden afzonderlijk te bepalen. Door echter aan n derzelve willekeurige waarden toe te kennen, kan men elke der p overige als bekend aannemen, en daar hare waarden te gelijker tijd veranderen met die, welke deze n grootheden naar welgevallen kunnen verkrijgen, worden de eerste gezegd functiën te zijn van n van elkander onafhankelijke veranderlijke grootheden.

De onderwerpen, in onze voorgaande lessen behandeld, betroffen uitsluitend de functiën eener enkele veranderlijke grootheid, zoo uit een zuiver analytisch als uit een meetkunstig oogpunt beschouwd. Thans stellen wij ons voor, aan het begrip der differentialen en afgeleide functiën van verschillende orden eene meerdere uitbreiding te geven, door hetzelve mede van toepassing te maken op functiën van twee of meer van elkander onafhankelijke veranderlijken. Onder het differentiëren van dergelijke functiën kan blijkbaar niets anders verstaan worden, dan het bepalen der betrekking tusschen de gelijktijdige oneindig kleine aangroeijingen van elke der veranderlijken, en die, welke de functie zelve ondergaat, daarbij onderstellende, dat die verschillende oneindig kleinen allen van dezelde orde zijn.

§ 135. Ten einde hierbij van het eenvoudige tot het meer zamengestelde over te gaan, zullen wij in de eerste plaats functiën van slechts twee veranderlijke elementen behandelen. Zij dan

$$z = f(x, y)$$

eene zoodanige functie. Daar hier x en y van elkander geheel onafhankelijk zijn, kan er ook geene bepaalde betrekking bestaan tusschen de gelijktijdige aangroeijingen van x en y, het zij men

die eindig of oneindig klein neme, zoo dat men elk element ook afzonderlijk kan doen aangroeijen, en het andere daarbij als eene standvastige grootheid beschouwen. Laten dan Δx en Δy de willekeurige eindige aangroeijingen van de veranderlijken x en y voorstellen, en Δz die, welke de functie z ten gevolge der *gelijktijdige* aangroeijingen van hare beide elementen ondergaat, dan heeft men blijkbaar

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Het kan hierbij gebeuren, dat de aanvankelijke waarde van z grooter is dan die, welke zij na deze gelijktijdige aangroeijingen verkrijgt, als wanneer het tweede lid der vergelijking (1) en dus ook Δz met een negatief teeken aangedaan wordt, in welk geval de aangroeijing in eene vermindering overgaat, even als wij zulks reeds bij de functiën van ééne veranderlijke grootheid hebben zien plaats vinden. Zoo lang derhalve het teeken van Δz onbekend blijft, kan men Δz als eene aangroeijing der functie z beschouwen.

Laat men echter x of y alleen aangroeijen, en dus y of x onveranderd, dan hebben wij in het eerste geval

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en in het tweede

$$\Delta z = f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Deze beide laatste waarden van Δz mogen niet met de eerste, volgens vergel. (1), verward worden, dewijl zij uit verschillende onderstellingen afgeleid zijn. Om die behoorlijk van elkander te onderscheiden, is men veel al gewoon voor de beide laatsten te schrijven $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, ter aanduiding dat daarbij x of y alleen als veranderlijk aangenomen is. Zij worden uit dien hoofde de partiele of gedeeltelijke aangroeijingen van z genaamd, terwijl daarentegen Δz de volledige aangroeijing der functie voorstelt.

Men kan de vergellijking (1) ook onder de navolgende gedaante schrijven

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y) + f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x + \Delta x,\ y).$$

of hetgeen op hetzelfde neêrkomt,

$$\Delta z = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} . \Delta x + \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \Delta y.$$

Laat men nu Δx, Δy in de oneindig kleine aangroeijingen dx, dy overgaan, dan beteekent het eerste gedeelte van het tweede

lid der voorgaande vergelijking, indien men zich bij differentialen van de eerste orde bepaalt, de waarde van $\frac{df(x,y)}{dx}.\,dx = \frac{dz}{dx}.\,dx$, hierbij onder den coëfficiënt $\frac{dz}{dx}$ verstaande, de eerste afgeleide functie van z in de onderstelling van y standvastig, of wel het partiele differentiaal-quotient van de functie z, alleen ten opzigte van x genomen.

Het andere gedeelte der voormelde vergelijking zal, in die zelfde onderstelling, overgaan in

$$\frac{d.\,f(x+dx,\,y)}{dy}.dy = \left(\frac{d.\,f(x,y)}{dy} + a\right)dy = \left(\frac{dz}{dy} + a\right)dy,$$

waarin a slechts eene oneindig kleine waarde voorstelt, en $\frac{dz}{dy}$ de afgeleide functie van z, x standvastig zijnde, of wel het partiele differentiaal-quotient van z ten opzigte van y beteekent. Voor de volledige waarde van dz verkrijgen wij mitsdien,

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy + a\,dy.$$

Daar echter de laatste term ady eene differentiaal minstens van de tweede orde voorstelt, en alzoo ten opzigte van de beide of voorgaande termen te verwaarloozen is, zal men mogen schrijven

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Het blijkt hieruit dat *de volledige differentiaal eener functie van twee van elkander onafhankelijke veranderlijken zamengesteld is uit de som der partiele differentialen, welke men verkrijgt, door hierbij beurtelings eene dezer veranderlijken als standvastig te beschouwen.*

§ 136. Om tot de zoo even gevondene uitkomst te geraken, had men ook aldus kunnen redeneren:

Uit de vergelijking

$$f(x + \Delta x, y) = z + \Delta_x z,$$

volgt terstond, door in elken term, y met Δy te doen aangroeijen,

$$z + \Delta z = f(x + \Delta x.\, y + \Delta y) = z + \Delta_y z + \Delta_x z + \Delta_y.\,\Delta_x z.$$

Derhalve

$$\Delta z = \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.\,\Delta x + \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.\,\Delta y + \frac{\Delta_y.\Delta_x z}{\Delta y \Delta x}.\,\Delta y\,\Delta x.$$

Veranderen wij thans $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ in dx, dy, dz, dan gaan de verhoudingen $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ over in hare limieten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, en dewijl de laatste term, die met het product $\Delta y\, \Delta x$ aangedaan is, eene oneindig kleine van de tweede orde aanduidt, bepaalt zich de waarde van dz tot dezelfde, welke hiervoren in verg. (4) vervat is.

In navolging van Cauchy, zullen wij de partiële differentialen der functie z, ten opzigte van x en y, kortheidshalve door $d_x z$ en $d_y z$ aanwijzen. Hierdoor verandert de vergel. (4) in deze meer eenvoudige

$$dz = d_x z + d_y z.$$

Zij bijv.

$$z = \frac{x^4}{y} + \frac{a^2 x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)}},$$

dan vindt men voor de partiële differentiaal quotienten,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{4x^3}{y} + \frac{a^2 x(x^2 + 2y^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{x^4}{y^2} - \frac{a^2 x^2 y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

Derhalve zal men voor de volledige differentiaal van z bekomen,

$$dz = \left(\frac{4x^3}{y} + \frac{a^2 x(x^2 + 2y^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\right) dx - \left(\frac{x^4}{y^2} + \frac{a^2 x^2 y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\right) dy.$$

§ 137. De vergelijking

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$$

zoude hare beteekenis geheel verliezen, indien men haar, door dx deelende, onder dezen vorm wilde schrijven

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Immers kan het differentiaal quotient $\frac{dy}{dx}$ geene bepaalde waarde aanwijzen, zoodra er tusschen x en y, en dus ook tusschen de differentialen dx, dy, geene betrekking van afhankelijkheid bestaat. Alleen dan zou de vergel. (5) als van eenige beteekenis kunnen aangemerkt worden, indien werkelijk y van x afhankelijk, en dus z insgelijks als eene functie van de enkele veranderlijke x te beschouwen ware. In dat geval behoort men echter onder het oog te houden, dat de

verhouding $\frac{dz}{dx}$, die het eerste lid der voorgaande vergelijking uitmaakt, geenszins dezelfde waarde voorstelt als $\frac{dz}{dx}$ in het tweede lid voorkomende. Deze laatste beteekent steeds het differentiaal quotient der nog uit x en y zamengestelde functie z, eeniglijk ten opzigte van x genomen, terwijl de eerste aanduidt het differentiaal quotient van z, nadat de veranderlijke y daaruit verdreven, en dus $z = f(x, y)$ overgegaan is in $z = \psi(x)$. (*) Het voorgaande voorbeeld zal zulks nader bevestigen. Onderstellen wij daarbij

$$y^2 = px, \quad \text{of} \quad y = \sqrt{px},$$

dus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}.$$

De partiële differentiaal quotienten veranderen thans, door de substitutie der waarde van y, in

$$\frac{dz}{dx} = 4x^2\sqrt{\frac{x}{p}} + \frac{a^2(x+2p)\sqrt{x}}{\sqrt{(x+p)^3}},$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{x^3}{p} - \frac{a^2 x\sqrt{p}}{\sqrt{(x+p)^3}}.$$

Dus, volgens verg. (5)

$$\frac{dz}{dx} = 4x^2\sqrt{\frac{x}{p}} + \frac{a^2(x+2p)\sqrt{x}}{\sqrt{(x+p)^3}} - \frac{1}{2}x^2\sqrt{\frac{x}{p}} - \frac{1}{2}\frac{a^2 p\sqrt{x}}{\sqrt{(x+p)^3}}$$

$$= \frac{7}{2}x^2\sqrt{\frac{x}{p}} + \frac{a^2(2x+3p)\sqrt{x}}{2\sqrt{(x+p)^3}}.$$

(*) De beroemde EULER onderscheidde uit dien hoofde de partiële differentiaal quotienten van de overige, door voor de eerste te schrijven $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, welke schrijfwijze echter later in onbruik geraakt is, uit hoofde er bij onafhankelijke veranderlijke elementen, door het weglaten der haakjes, geene verwarring zal kunnen ontstaan. Het zoude voorzeker ter vereenvoudiging in het opschrijven der partiële differentiaal quotienten van verschillende orden kunnen strekken, bijaldien men overeenkwam de verhoudingen

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dy^2}, \quad \frac{d^2z}{dxdy} \text{ enz.}$$

voortaan door

$$\partial_x z, \quad \partial_y z, \quad \partial_x^2 z, \quad \partial_y^2 z, \quad \partial_{x,y}^2 z \text{ enz.}$$

te vervangen.

Van deze vereenvoudigde notatie hebben wij reeds gebruik gemaakt in onze *Mémoire sur la théorie des caractéristiques*, te vinden in het VIe deel van de verhandelingen der 1e klasse van het K. N. Instituut.

Elimineert men nu y uit de waarde van z, dan heeft men

$$z = x^3 \sqrt{\frac{x}{p}} + a^2 x \sqrt{\frac{x}{x+p}}.$$

Derhalve

$$\frac{dz}{dx} = \frac{7}{2} x^2 \sqrt{\frac{x}{p}} + a^2 \sqrt{\left\{\frac{x}{x+p}\right.} + \frac{p}{2} \sqrt{\left.\frac{x}{(x+p)^3}\right\}}$$

$$= \frac{7}{2} x^2 \sqrt{\frac{x}{p}} + \frac{a^2 (2x+3p) \sqrt{x}}{2\sqrt{(x+p)^3}},$$

welke uitkomst met die volgens verg. (5) geheel overeenstemt.

§ 138. Alvorens tot de behandeling der functiën van meer dan twee veranderlijke grootheden over te gaan, achten wij het niet overbodig het onderscheid tusschen de drie verschillende aangroeijingen, waarvoor de functie z vatbaar is, door eene meetkunstige beschouwing, nader toe te lichten.

Nemen wij in het vlak der coördinaten-assen OX, OY (*fig.* 52), een punt $P(x, y)$ aan, en rigten wij in dat punt eene loodlijn $PM = z = f(x, y)$ op, dan zal de meetkunstige plaats van al de punten M, in het algemeen, een gebogen vlak voorstellen, tot vergelijking hebbende $z = f(x, y)$.

Men brenge door de ordinaat MP twee vlakken evenwijdig aan de yz, en xz vlakken, en welke het gebogen oppervlak snijden volgens de kromme lijnen MB, MC. Voor al de punten der eerste kromme zijn de coördinaten y, z veranderlijk, terwijl $x = OQ$ eene standvastige waarde behoudt. Voor al de punten der tweede daarentegen zijn de coördinaten x, z veranderlijk, terwijl $y = OR$ standvastig blijft. De vergelijking $z = f(x, y)$ behoort dus mede tot elk der beide krommen, mits daarin beurtelings x en y als standvastig aannemende. Gaat men nu in de kromme MC van het punt $M(x, y, z)$ tot het naburig punt m over, voor hetwelk x met zijne differentiaal dx is aangegroeid, terwijl y onveranderd gebleven is, dan zal het oneindig kleine verschil tusschen de naburige ordinaten MP, mp, de partiële differentiaal van z ten opzigte van x, of de waarde van $d_x z = \frac{dz}{dx} dx$ voorstellen. Bij den overgang van het punt M tot het naburige punt m_1 in de andere kromme MB, als wanneer y met dy aangegroeid, en x standvastig gebleven is, zal het oneindig kleine verschil tusschen de twee naburige ordinaten MP, $m_1 p_1$, de partiële differentiaal van z ten opzigte van y, of de waarde

van $d_y z = \frac{dz}{dy} dy$ voorstellen. Brengen wij thans door de ordinaten mp, $m_1 p_1$ twee vlakken insgelijks evenwijdig aan de reeds genoemde coördinaten-vlakken, dan zullen hunne doorsneden met het gebogen oppervlak twee andere krommen $B_1 M_1 m$, $C_1 m_1 M_1$ opleveren. De gemeene doorsnede $M_1 P_1$ dezer twee vlakken, is de ordinaat van een derde naburig punt M_1, welks projectie P_1 tot coördinaten heeft $x + dx$, $y + dy$. Het oneindig kleine verschil tusschen deze ordinaat en de aanvankelijke ordinaat $MP = z$, zal hier de volledige differentiaal dz, ontstaande uit de gelijktijdige aangroeijingen van x en y aanduiden. De figuur toont wijders aan, dat de overgang van het punt M tot het punt M_1 op het gebogen vlak, dat is van z tot $z + dz$, kan geschieden op twee verschillende wijzen, namelijk, of van M tot m op de kromme CM, en vervolgens van m tot M_1 op de kromme $B_1 m$; of wel van M tot m_1 op de kromme BM_1, en vervolgens van m tot M_1 op de kromme $C_1 M_1$. In het eerste geval verandert z in $z + d_x z$, en deze vervolgens in

$$z + d_x z + d_y(z + d_x z) = z + d_x z + d_y z + d_y d_x z,$$

en in het tweede geval verandert z in $z + d_y z$, en deze vervolgens in

$$z + d_y z + d_x(z + d_y z) = z + d_y z + d_x z + d_x d_y z.$$

Beide uitkomsten dezelfde waarde voor $z + dz$ moetende opleveren, zoo volgt hieruit in de eerste plaats, dat de differentialen $d_y d_x z$, $d_x d_y z$ gelijke waarden hebben, en wijders dat, uithoofde deze laatste differentialen van de tweede orde zijn, en alzoo ten aanzien van die der eerste orde mogen verwaarloosd worden, men zal mogen stellen,

$$z + dz = z + d_x z + d_y z,$$

of
$$dz = d_x z + d_y z = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

even als reeds hiervoren gevonden is.

Wij leeren hieruit tevens, dat het gebogen vlakje $Mm\,M_1 m_1$, hetwelk den oneindig kleinen regthoek $dx\,dy$ tot projectie op het xy vlak heeft, met verwaarloozing der oneindig kleinen van hoogere orden, als een plat vlakje mag beschouwd worden. Immers, indien de vier hoekpunten M, m, M_1, m_1 in hetzelfde vlak liggen, dan is, volgens eene bekende eigenschap,

$$MP + M_1 P_1 = mp + m_1 p_1,$$

of $$z + z + dz = z + \frac{dz}{dx}dx + z + \frac{dz}{dy}dy,$$

dat is $$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

Daarenboven geeft de hiervoren gevonden gelijkheid $d_x d_y z = d_y d_x z$ te kennen, dat men door eene herhaalde differentiatie der functie z, in de onderstelling dat beurtelings slechts x of y veranderlijk is, dezelfde uitkomsten verkrijgt, in welke orde deze achtervolgende differentiatiën uitgevoerd worden. Zulks is reeds in § 36 gebleken, bij het differentiëren eener functie van x, onder den vorm $f(x, y) = 0$, terwijl het aldaar gegeven analytische betoog blijkbaar even geldig is, hetzij de veranderlijken x en y al dan niet van elkander afhankelijk ondersteld worden. Wij zullen in de volgende les gelegenheid hebben op deze eigenschap terug te komen.

§ 139. Beschouwen wij thans eene functie

$$u = f(x, y, z, t \ldots),$$

van een willekeurig aantal van elkander onafhankelijke veranderlijke elementen, en laten wederom de verschillende partiële differentialen van u, alleen ten opzigte van x, y, z, enz. genomen, door

$$d_x u = \frac{du}{dx}dx, \quad d_y u = \frac{du}{dy}dy, \quad d_z u = \frac{du}{dz}dz, \text{ enz.}$$

en de volledige differentiaal van u, door du voorgesteld worden.

Zoo men x en y gelijktijdig verandert, en daarbij elk der overige elementen als standvastig behandelt, gaat u over in $u + d_x u + d_y u$.

Laat men nu in deze uitkomst z met dz aangroeijen, dan is het om het even als of men in u, aanvankelijk x, y en z gelijktijdig had doen aangroeijen. De vorige uitkomst verandert hierdoor in

$$u + d_x u + d_y u + d_z u + d_z d_x u + d_z d_y u,$$

of met verwaarloozing der hoogere differentialen, in

$$u + d_x u + d_y u + d_z u.$$

En op die wijze voortgaande, komt men spoedig tot de algemeene differentiaal-betrekking

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + d_t u + \text{enz.},$$

of $$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \frac{du}{dt}dt + \text{enz.}$$

welke men ook gewoon is aldus te schrijven

$$du = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \frac{df}{dt}dt + \text{enz.}$$

en waaruit wij mogen besluiten, dat *de volledige differentiaal eener functie van een willekeurig aantal van elkander onafhankelijke elementen zamengesteld is uit de som der partiële differentialen dezer functie genomen, beurtelings ten opzigte van elk der veranderlijke elementen in het bijzonder, daarbij de overige als standvastigen beschouwende.*

Bestaan er tusschen deze veranderlijke grootheden eenige bepaalde betrekkingen, hetgeen onder anderen plaats vindt, indien bijv. y, z, t enz. allen gegevene functiën van x zijn, dan zal men in de vorige algemeene uitkomst slechts te substitueren hebben $\frac{dy}{dx}dx$, $\frac{dz}{dx}dx$, $\frac{dt}{dx}dx$, enz. voor dy, dz, dt enz. Men verkrijgt hierdoor voor de differentiaal van u beschouwd als eene functie van het enkele onafhankelijke element x,

$$du = \left\{\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \text{enz.}\right\}dx.$$

Stellen wij bijv.

$$u = xyzt,$$

dan heeft men terstond

$$du = yzt\,dx + xzt\,dy + xyt\,dz + xyz\,dt,$$

en in het geval dat x, y, z, t, functiën eener nieuwe veranderlijke x' zijn,

$$\frac{du}{dx'} = yzt\frac{dx}{dx'} + xzt\frac{dy}{dx'} + xyt\frac{dz}{dx'} + xyz\frac{dt}{dx'}.$$

Is u eene functie van $x + y + z + \ldots$, dan zullen al hare gedeeltelijke differentiaal quotienten dezelfde waarden verkrijgen. Immers, stellende

$$x + y + z + \ldots = t,$$

dan wordt u eene functie van t, en uit dien hoofde

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dy}, \text{ enz.}$$

Uit de waarde van t volgt echter,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dy} = \frac{dt}{dz} \ldots = 1.$$

Derhalve

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} = \frac{du}{dz} \ldots = \frac{du}{dt}.$$

§ 140. Zij $u = f(x, y, z)$, en laten x, y, z elk op zich zelve eene willekeurige functie zijn van drie andere onafhankelijke veranderlijke grootheden p, q, r, dan zal men, u als eene functie van p, q, r beschouwende, even goed mogen schrijven

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

als

$$du = \frac{du}{dp}\,dp + \frac{du}{dq}\,dq + \frac{du}{dr}\,dr \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Men kan zulks aldus betoogen.

Daar namelijk x eene functie van p, q, r is, heeft men

$$dx = \frac{dx}{dp}\,dp + \frac{dx}{dq}\,dq + \frac{dx}{dr}\,dr,$$

en insgelijks

$$dy = \frac{dy}{dp}\,dp + \frac{dy}{dq}\,dq + \frac{dy}{dr}\,dr,$$

$$dz = \frac{dq}{dp}\,dp + \frac{dz}{dq}\,dq + \frac{dz}{dr}\,dr.$$

Deze waarden substituërende in de vergelijking (6), komt er

$$du = \left\{\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dp} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dp} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dp}\right\}dp,$$

$$+ \left\{\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dq} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dq} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dq}\right\}dq,$$

$$+ \left\{\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dr} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dr} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dr}\right\}dr.$$

De grootheden tusschen de haakjes juist met de waarden van $\frac{du}{dp}$, $\frac{du}{dq}$, $\frac{du}{dr}$ overeenkomende, zoo blijkt hieruit de waarheid van het gestelde, en men zal zich op eene gelijksoortige wijze gemakkelijk kunnen overtuigen, dat zulks eveneens geldt van een willekeurig aantal veranderlijken, waarvan elk in het bijzonder eene functie is van een zeker aantal andere onafhankelijke veranderlijken.

§ 141. Onder eene gelijkslachtige functie (*fonctionhomogène*) van een willekeurig aantal veranderlijken $x, y, z, t\ldots$, verstaat men zoodanige functie, welke de eigenschap bezit, dat elk van hare termen, na verandering van $x, y, z, t\ldots$ in ix, iy, iz, $it\ldots$, door dezelfde magt van den factor i deelbaar wordt. De exponent dezer magt wijst als

dan den graad der functie aan. Alzoo zullen bijv. de uitdrukkingen

$$\frac{y^3}{x} + \frac{\sqrt{(x^2 z^5 - z^3 x^4)}}{\sqrt{y^3}} + x^2,$$

$$ax^2 y + b\sqrt{(x^6 + z^6)} - \frac{cz^4}{x},$$

gelijkslachtige functien van den tweeden en derden graad zijn.

Zal dus $u = F(x, y, z, t\ldots)$ eene dergelijke functie van den m^{en} graad zijn, dan wordt hiertoe gevorderd, dat

$$F(ix, iy, iz\ldots) = i^m F(x, y, z\ldots)$$

zij. Het voorste lid dezer vergelijking als eene functie van i beschouwende, en stellende

$$ix = x', \quad iy = y', \quad iz = z' \text{ enz.},$$

verkrijgt men, na differentiatie ten opzigte van i (§ 139)

$$\frac{du}{dx'} \cdot \frac{dx'}{di} + \frac{du}{dy'} \cdot \frac{dy'}{di} + \frac{du}{dz'} \cdot \frac{dz'}{di} + \ldots$$

$$= mi^{m-1} F(x, y, z\ldots) = mi^{m-1} u.$$

Maar $\quad \frac{dx'}{di} = x, \quad \frac{dy'}{di} = y, \quad \frac{dz'}{di} = z, \ldots$

zijnde, zoo verandert de voorgaande vergelijking in

$$x\frac{du}{dx'} + y\frac{du}{dy'} + z\frac{du}{dz'} + \ldots = mi^{m-1} u,$$

en door tevens $i = 1$ te stellen, komt er

$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} + \ldots = mu,$$

waaruit de navolgende opmerkelijke eigenschap voortvloeit.

Indien men de gedeeltelijke differentiaal quotienten eener gelijkslachtige functie van den m[en] *graad vermenigvuldigt met de veranderlijke grootheden, ten opzigte van welke zij genomen zijn, zal de som dezer producten gelijk worden aan het* m*-voud der gegevene functie.*

Men neme tot voorbeelden:

1°. $\quad u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Exz + Fxy,$

dan is $\quad \frac{du}{dx} = 2Ax + Ez + Fy,$

$$\frac{du}{dy} = 2By + Dz + Fx,$$

$$\frac{du}{dz} = 2Cz + Dy + Ex.$$

Werkelijk is ook, omdat hier $m=2$ is,

$$x(2Ax+Ez+Fy)+y(2By+Dz+Fx)+z(2Cz+Dy+Ex),$$
$$=2(Ax^2+By^2+Cz^2+Dyz+Exz+Fxy).$$

2°. $$u=\frac{x^2}{y}-y\,l\left(\frac{x}{y}\right),\quad m=1,$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{2x}{y}-\frac{y}{x},$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{-x^2}{y^2}-l\left(\frac{x}{y}\right)+1,$$

$$x\left(\frac{2x}{y}-\frac{y}{x}\right)+y\left(1-\frac{x^2}{y^2}-l\left(\frac{x}{y}\right)\right)=\frac{x^2}{y}-y\,l\left(\frac{x}{y}\right).$$

3°. $$u=\frac{x^3}{y^3}-\frac{ay}{x},\quad m=0,$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{3x^2}{y^3}+\frac{ay}{x^2},$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{-3x^3}{y^4}-\frac{a}{x},$$

$$x\left(\frac{3x^2}{y^3}+\frac{ay}{x^2}\right)-y\left(\frac{3x^3}{y^4}+\frac{a}{x}\right)=0.$$

NEGENTIENDE LES.

Ontwikkeling der tweede en hoogere differentialen van functiën van twee of meer veranderlijke grootheden.

§ 142. Het bepalen der differentialen van de tweede en hoogere orden der functiën van een aantal van elkander onafhankelijke elementen zal aan geene zwarigheid kunnen onderhevig zijn, zoodra men het hiervoren verklaarde, ten opzigte van de differentialen der eerste orde, wel begrepen heeft, weshalve wij het niet noodzakelijk achten, deswege in uitvoerige ontwikkelingen te treden.

Beschouwen wij dan wederom in de eerste plaats, eene functie u van twee veranderlijke grootheden x,y. Even als nu de volledige eerste differentiaal du uit u is afgeleid door x en y met dx en dy te doen aangroeijen, en vervolgens in het verschil

$$f(x+dx, y+dy) - f(x,y),$$

de tweede en hoogere differentialen van x en y buiten rekening te laten, zoo ook zoude men, om uit du de waarde der tweede differentiaal d^2u af te leiden, eene gelijksoortige handelwijze kunnen toepassen op de vergelijking

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy,$$

waarin de coëfficiënten van dx en dy, in het algemeen, insgelijks functiën van x en y aanduiden. Stellen wij deze functiën kortheidshalve voor door P en Q, dan heeft men

$$du = Pdx + Qdy.$$

Gemakkelijker zal het echter zijn, hierbij aldus te werk te gaan. Dewijl du uit twee afzonderlijke deelen zamengesteld is, zal de oneindig kleine aangroeijing van du insgelijks moeten zamengesteld zijn uit die, welke elk dezer deelen afzonderlijk ondergaat, nadat daarin x, y, dx, dy elk met hunne differentialen zijn vermeerderd. Op dien grond mag men dus stellen

$$d^2u = d.(Pdx) + d(Qdy).$$

Daar nu x en y, en dus ook dx en dy door geene bepaalde betrekking aan elkander verbonden zijn, zoo belet niets om x en y gelijkmatig te doen aangroeijen, dat is met andere woorden, om dx en dy, bij deze nieuwe differentiatie, als standvastig te behandelen, en hierdoor meer eenvoudige uitdrukkingen voor de waarden der differentialen van hoogere orden te verkrijgen. In deze onderstelling kunnen wij voor d^2u schrijven

$$d^2u = dPdx + dQdy,$$

en als dan op dP en dQ den regel voor het differentiëren eener functie van twee veranderlijke grootheden toepassen, waardoor men bekomt

$$dP = \frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy,$$

$$dQ = \frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy.$$

Maar

$$\frac{dP}{dx} = d.\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2},$$

zijnde, beteekent niets anders dan het gedeeltelijke differentiaal quotient der tweede orde van de functie u, eeniglijk ten opzigte van x genomen, als of y standvastig ware. Even zoo beteekent

$$\frac{dQ}{dy} = d.\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{dy} = \frac{d^2u}{dy^2},$$

het gedeeltelijke differentiaal-quotient der tweede orde van de functie u, eeniglijk ten opzigte van y genomen, als of x standvastig ware.

Wat de beide overige differentiaal-quotienten $\frac{dP}{dy}$, $\frac{dQ}{dx}$ betreft, die respectivelijk kunnen voorgesteld worden door $\frac{d^2u}{dy\,dx}$ en $\frac{d^2u}{dx\,dy}$; deze beteekenen de tweede differentiaal-quotienten, welke men verkrijgt door u eerst ten opzigte van x alleen, en vervolgens ten opzigte van y alleen, of omgekeerd, te differentiëren. Dat zij beiden dezelfde uitkomst opleveren, is terstond op te maken uit de reeds vroeger betoogde identiteit van d_xd_yu en d_yd_xu (§ 138). Immers volgt uit de beteekenis der partiele differentialen d_yu, d_xu, dat $d_x\,d_yu$ eene verkorte voorstelling is van

$$\frac{d.\left(\frac{dn}{dy}\right)dy}{dx}dx = \frac{d^2u}{dxdy}dydx,$$

en $d_y d_x u$ eene dergelijke van

$$\frac{d.(\frac{du}{dx}dx)}{dy}dy = \frac{d^2u}{dydx}dydx.$$

Hieruit volgt derhalve de gelijkheid

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}.$$

Op grond van al het voorgaande mogen wij alzoo stellen,

$$dP = d.(\frac{du}{dx}) = \frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dxdy}dx,$$

$$dQ = d.(\frac{du}{dy}) = \frac{d^2u}{dxdy}dx + \frac{d^2u}{dy^2}dy,$$

en derhalve

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2. \quad . \quad . \quad (1)$$

welke uitdrukking, mits dx en dy standvastig nemende, de volledige differentiaal der tweede orde van de functie u voorstelt.

Wij leeren hieruit, dat deze volledige tweede differentiaal, uit drie afzonderlijke deelen of partiële differentialen is zamengesteld. Het eerste wordt verkregen door u twee achtervolgende malen eeniglijk ten opzigte van x; het tweede, door u achtervolgens, het zij eerst ten opzigte van x alleen, en vervolgens ten opzigte van y alleen, het zij in omgekeerde orde, te differentiëren, en de uitkomst te verdubbelen: het derde, door u twee achtervolgende malen eeniglijk ten opzigte van y te differentiëren.

Daar wijders de tweede partiële differentialen $\frac{d^2u}{dx^2}dx^2$, $\frac{d^2u}{dy^2}dy^2$, ingevolge de vroeger aangenomen notatie, door $d_x d_x u$ of $d^2{}_x u$ en $d_y d_y u$ of $d^2{}_y u$ kunnen aangeduid worden, laat zich de waarde van d^2u ook onder dezen meer beknopten vorm schrijven:

$$d^2u = d^2{}_x u + 2\,d_x d_y u + d^2{}_y u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

§ 143. Bij den overgang van d^2u tot d^3u, zal men blijkbaar *vier* verschillende partiële differentialen der derde orde verkrijgen. De functie u kan namelijk gedifferentiëerd worden in de vier navolgende onderstellingen:

1°. drie malen ten opzigte van x alleen als veranderlijke,

2°. drie malen ten opzigte van y alleen als veranderlijke,

3°. twee malen ten opzigte van x, en eens ten opzigte van y, en

4°. eens ten opzigte van x, en twee malen ten opzigte van y.

De eerste dezer partiële differentialen van de derde orde wordt aangewezen door $\frac{d^3u}{dy^3}dx^3$ of $d^3{}_xu$. De tweede door $\frac{d^3u}{dy^3}dy^3$ of $d^3{}_yu$.

Ten aanzien van de beide overige valt nog aan te merken, dat elke derzelven voor drie verschillende rangschikkingen vatbaar is, met betrekking tot het daarbij als veranderlijk aangenomen element. Immers, bij de derde kan men achtervolgens als veranderlijk beschouwen:

$$x\,,\ x\,,\ y$$
$$x\,,\ y\,,\ x$$
$$y\,,\ x\,,\ x$$

waardoor men verkrijgt

$$\frac{d^3u}{dydx^2}dx^2dy,\qquad \frac{d^3u}{dxdydx}dx^2dy,\qquad \frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy,$$

of wel

$$d_yd^2{}_xu,\qquad d_xd_yd_xu.\qquad d^2{}_xd_yu,$$

en bij de vierde

$$y\,,\ y\,,\ x$$
$$y\,,\ x\,,\ y$$
$$x\,,\ y\,,\ y$$

waardoor men verkrijgt

$$\frac{d^3u}{dxdy^2}dxdy^2,\qquad \frac{d^3u}{dydxdy}dxdy^2,\qquad \frac{d^3u}{dy^2dx}dxdy^2.$$

of wel

$$d_xd^2{}_yu,\qquad d_yd_xd_yu,\qquad d^2{}_yd_xu.$$

Men kan echter gemakkelijk betoogen, dat elke der drie eerste partiële differentiatiën tot dezelfde uitkomst leidt, en zulks met de drie laatste insgelijks het geval zal zijn.

Men heeft namelijk, op grond der identiteit van d_xd_yu en d_yd_xu,

$$d_yd^2_xu = d_yd_xd_xu = d_xd_yd_xu,$$
$$\text{en}\quad d_xd_yd_xu = d_xd_xd_yu = d^2{}_xd_yu.$$
$$d_xd^2_yu = d_xd_yd_yu = d_yd_xd_yu,$$
$$\text{en}\quad d_yd_xd_yu = d_yd_yd_xu = d^2{}_yd_xu.$$

Het zal niet moeijelijk vallen zich op eene gelijksoortige wijze van de waarheid der navolgende algemeene eigenschap van de partiële differentialen te verzekeren.

Indien de functie u, m + n *achtervolgende malen gedifferentiëerd moet*

worden, te weten m *malen ten opzigte van* x *alleen, en* n *malen ten opzigte van* y *alleen, zal men steeds dezelfde uitkomst verkrijgen, in welke volgorde deze differentiatiën uitgevoerd worden*; zoodat men zal mogen stellen

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n} = \frac{d^{m+n}u}{dy^n dx^m} = \frac{d^{m+n}u}{dy^{n-p}dx^{m-q}dy^p dx^q} \text{ enz.}$$

§ 144. Wij kunnen thans uit de vergel. (2) gemakkelijk eene uitdrukking afleiden voor de waarde der volledige derde differentiaal d^3u. Door namelijk van elken term dezer vergelijking afzonderlijk de volledige differentiaal te nemen, verkrijgen wij terstond,

$$d^3u = d.(d^2{}_x u) + 2\,d.(d_x d_y u) + d.(d^2{}_y u). \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Omdat nu elk dezer termen op zich zelf eene functie van x en y is, heeft men

$$d.(d^2{}_x u) = d^3{}_x u + d_y d^2{}_x u,$$
$$d.(d_x d_y u) = d^2{}_x d_y u + d_y d_x d_y u,$$
$$d.(d^2{}_y u) = d_x d^2{}_y u + d^3{}_y u.$$

Deze waarden substituerende in de vergel. (3), en hierbij acht gevende op de hiervoren vermelde algemeene eigenschap der partiële differentialen van hoogere orden, bekomen wij

$$d^3u = d^3{}_x u + 3\,d^2{}_x d_y u + 3\,d_x d^2{}_y u + d^3{}_y u, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

of wel, van de gewone doch minder eenvoudige notatie gebruik makende,

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + \frac{3\,d^3y}{dx^2dy}dx^2dy + \frac{3\,d^3u}{dxd^2y}dxd^2y + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3.$$

Dezelfde bewerking voortzettende, om daaruit de waarden der volgende hoogere differentialen af te leiden, vindt men met weinig moeite

$$d^4u = d^4{}_x u + 4\,d^3{}_x d_y u + 6\,d^2{}_x d^2{}_y u + 4\,d_x d^3{}_y u + d^4{}_y u,$$

en men zal, uit hoofde van de overeenkomst der getallen-coëfficienten met die der magten van een binomium, uit het voorgaande, in het algemeen mogen besluiten,

$$d^n u = d^n_x u + n d^{n-1}_x d_y u + \frac{n(n-1)}{1.2} d^{n-2}_x d^2_y u \ldots + d^n_y u. \quad : \quad (5)$$

Om allen twijfel aangaande de wettigheid van dat besluit weg te nemen, zal het voldoende zijn te betoogen, dat indien deze algemeene formule waar is voor $n = p$, zij insgelijks voor $n = p + 1$,

en dus voor alle waarden van n geldig zal zijn, hetgeen wij den lezer overlaten.

De coëfficient $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m.}$ der partiële differentiaal $d_x^{n-m}d_y^m u$, stelt blijkbaar het aantal verschillende wijzen voor, waarop de functie u, $n-m$ malen ten opzigte van x en m malen ten opzigte van y kan gedifferentieerd worden; en aangezien de uitkomst van elke dezer differentiatiën, blijkens de reeds vermelde algemeene eigenschap, onafhankelijk is van hare volgorde, geeft de algemeene formule (5) tevens te kennen, dat *de* n^e^ *volledige differentiaal eener functie* u *van twee veranderlijke grootheden, zamengesteld is uit de som van alle hare partiële differentialen van dezelfde orde, op alle mogelijke wijzen ten aanzien van eene of twee dezer veranderlijken genomen.*

§ 145. Men is veelal gewoon de algemeene waarde van $d^n u$, onder den navolgenden zoogenaamden symbolischen vorm beknoptelijk aan te duiden

$$d^n u = \left\{\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right\}^n,$$

onder voorbehoud nogtans, om, bij de ontwikkeling van het binomium, elk product van den vorm $\frac{du^p}{dx^p}\cdot\frac{du^{n-p}}{dy^{n-p}}$, door $\frac{d^n u}{dx^p\,dy^{n-p}}$ te vervangen.

Een meer geschikte vorm van dien aard is echter de volgende,

$$d^n u = (d_x + d_y)^n u,$$

waarvan de ontwikkeling geene verandering behoeft te ondergaan, dewijl elke term, na met u aangedaan te zijn, alsdan, volgens de aangenomen verkorte notatie, van zelf de bewerking aanduidt, welke op de functie u te verrigten is. Even nu als de letter n in $\Delta^n u$ geene magt van Δ voorstelt, maar alleen beteekent, dat de bewerking, door het teeken Δ aangeduid, namelijk het bepalen der eindige aangroeijing van u met eene zekere aangroeijing van x overeenkomende, n achtervolgende malen op die functie te herhalen is, zoo heeft ook hier de exponent n eene gelijksoortige beteekenis ten aanzien der zamengestelde bewerking door $(d_x + d_y)$ aangewezen.

Deze beschouwing staat in een naauw verband met de leer der caracteristieken, welker behandeling echter buiten het bestek van dit leerboek ligt, doch waaromtrent wij den weetgierigen lezer vermeenen te moeten verwijzen naar onzen, in de noot op bladz. 226 reeds aangehaalden arbeid over dat onderwerp.

Het berekenen der tweede en hoogere differentialen eener functie

van twee veranderlijke grootheden, volgens de hiervoren medegedeelde formulen, geene zwarigheid kunnende opleveren, zoodra men bekend is met de regels voor het differentiëren der verschillende soorten van functiën eener enkele veranderlijke grootheid, zullen wij ons slechts bij het navolgende voorbeeld ter toepassing bepalen.

De tweede en derde differentialen te vinden der functie

$$u = x^4 - ax^2y + y^4,$$

$$d_xu = (4x^3 - 2axy)\,dx, \qquad d_yu = (4y^3 - ax^2)\,dy,$$
$$d_yd_xu = -2ax\,dxdy, \qquad d_xd_yu = -2ax\,dxdy,$$
$$d_y^2d_xu = 0, \qquad d^2_xd_yu = -2a\,dx^2dy,$$
$$d^2_xu = (12x^2 - 2ay)\,dx^2, \qquad d^2_yu = 12y^2dy^2,$$
$$d^3_xu = 24x\,dx^3, \qquad d^3_yu = 24y\,dy^3.$$

Derhalve

$$d^2u = (12x^2 - 2ay)\,dx^2 - 4ax\,dx\,dy + 12y^2dy^2,$$
$$d^3u = 24x\,dx^3 - 6a\,dx^2dy + 24y\,dy^3.$$

§ 146. Voor functiën van drie of meer onafhankelijke veranderlijken zullen wij op gelijke wijze de waarden der tweede en hoogere differentialen kunnen bekomen.

Zij $$u = f(x, y, z),$$

dus $$du = d_xu + d_yu + d_zu,$$

en $$d^2u = d(d_xu) + d(d_yu) + d(d_zu). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Daar elke der drie partiële eerste differentialen van u, wederom als eene functie van x, y, z moet beschouwd worden, heeft men

$$d.(d_xu) = d^2_xu + d_yd_xu + d_zd_xu,$$
$$d.(d_yu) = d_zd_yu + d^2_yu + d_zd_yu,$$
$$d.(d_zu) = d_xd_zu + d_yd_zu + d^2_zu.$$

Derhalve komt er, na het substituëren dezer waarden in de vergel. (6), en met in achtneming der gelijkheden,

$$d_xd_yu = d_yd_xu. \quad d_xd_zu = d_zd_xu. \quad d_yd_zu = d_zd_yu,$$

$$d^2u = d^2_xu + d^2_yu + d^2_zu + 2\,d_xd_yu + 2\,d_xd_zu + 2\,d_yd_zu,$$

welke vergelijking, naar aanleiding van § 145, ook voorgesteld mag worden onder den symbolischen vorm

$$d^2u = (d_x + d_y + d_z)^2u,$$

en als zoodanig onmiddelijk had kunnen afgeleid worden uit de vergelijking

$$du = (d_x + d_y + d_z)u,$$

welker volledige differentiaal, tot waarde heeft

$$d^2u = d_x du + d_y du + d_z du,$$

$$= (d_x + d_y + d_z)(d_x + d_y + d_z)u = (d_x + d_y + d_z)^2 u,$$

waarin de exponent 2 eeniglijk tot aanwijzing strekt eener twee malen op de functie u uitgevoerde zamengestelde bewerking, aangeduid door het symbolische teeken $(d_x + d_y + d_z)$.

Op gelijke wijze van d^2u tot d^3u overgaande, vindt men terstond

$$d^3u = (d_x + d_y + d_z)(d_x + d_y + d_z)^2 u = (d_x + d_y + d_z)^3 u,$$

en in dier voege geraakt men onmiddelijk tot de algemeene formule

$$d^n u = (d_x + d_y + d_z)^n u \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Men behoort echter hierbij niet uit het oog te verliezen, dat de juistheid van dezen vorm alleen haren grond vindt in de eigenschap der partiële differentialen van de n^e orde eener functie van drie veranderlijke grootheden, volgens welke de waarde van

$$d_x^p d_y^q d_z^r u = \frac{d^n u}{d^p x d^q y d^r z} d^p x d^q d^r z,$$

$p + q + r = n$ zijnde, steeds onafhankelijk is van de volgorde bij deze verschillende partiële differentiatiën, ten aanzien van x, y, z, in acht genomen.

Na hetgeen reeds vroeger (§ 143) dienaangaande, voor het geval van slechts twee veranderlijke grootheden aangevoerd is, zal deze eigenschap voor functien van drie veranderlijke grootheden geen afzonderlijk betoog vorderen, maar als een gevolg daarvan mogen beschouwd worden, dewijl men, door telkens de opvolging van twee differentiatiën ten opzigte van twee verschillende elementen om te keeren, steeds in de gelegenheid is, de orde der n achtervolgende partiële differentiatiën naar welgevallen te veranderen. Men zal zelfs thans gemakkelijk inzien, dat de bedoelde eigenschap zich op functien van een willekeurig aantal onafhankelijke veranderlijken laat uitstrekken, en men derhalve, indien U eene functie van $x, y, z, t, u \ldots$ voorstelt, de waarde van hare volledige differentiaal der n^e orde zal kunnen uitdrukken, met behulp van een' dezer twee symbolische vormen

$$d^nU = (d_x + d_y + d_z + d_t + d_u + \ldots)^n U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$d^nU = \left\{\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz + \ldots\right\}^n . \quad . \quad . \quad (9)$$

in welke laatste, de letter U ook somtijds door eene der letters F, φ, enz., die de functie aanwijzen, vervangen wordt.

§ 147. Omtrent de beide voorgaande symbolische vormen of uitdrukkingen behooren wij hier de niet onbelangrijke opmerking nog bij te voegen, dat de eerste ook dan geldig is, bijaldien de veranderlijke grootheden $x, y, z \ldots$ niet meer van elkander geheel onafhankelijk zijn, maar als functien van andere veranderlijken voorkomen, waardoor het niet meer geoorloofd is, de differentialen dx, dy, dz enz. als standvastig te behandelen.

Bij ontwikkeling van dezen vorm zal men als dan slechts te letten hebben, om bijv. d_x^pU te beschouwen als de p^e differentiaal der functie U, of de $(p-1)^e$ differentiaal van het product $\frac{dU}{dx}dx$, genomen in de onderstelling van x en dx veranderlijk. De vorm, in verg. (9) vervat, zal daarentegen zijne bruikbaarheid missen, dewijl $\frac{d^pU}{dx^p} . dx^p$, thans ophoudt de p^e differentiaal der functie U ten opzigte van x aan te wijzen.

De algemeene juistheid van den vorm, volgens verg. (8), is hierop gegrond, dat de, in § 143 vermelde grondeigenschap der partiële differentialen, ook dan doorgaat, ingeval de elementen $x,y,z\ldots$ van andere veranderlijken afhankelijk zijn; en hiervan kan men zich gemakkelijk aldus overtuigen:

Zij $$u = f(x, y),$$
dus $$du = Pdx + Qdy,$$
en $$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2u}{dxdy} = R.$$

Nu is, dx als veranderlijk aannemende,

$$d_x(d_xu) = \frac{dP}{dx}dx^2 + Pd^2x,$$

en $$d_yd_x.(d_xu) = \frac{d^2P}{dydx}dx^2dy + R\,dydx^2.$$

Maar, uit de vergelijking

$$d_y(d_xu) = \frac{dP}{dy}dxdy = Rdxdy,$$

volgt, na differentiatie ten opzigte van x

$$d_x d_y(d_x u) = \frac{d^2 P}{dx dy} dx^2 dy + R\,dy d^2 x.$$

Derhalve

$$d_x d_y(d_x u) = d_y d_x(d_x u) = d_y d_x^2 u,$$

en op gelijke wijze vindt men

$$d_y d_x(d_y u) = d_x d_y(d_y u) = d_x d_y^2 u,$$

ten blijke, dat men in de grondformule

$$d_x d_y u = d_y d_x u,$$

u door $d_x u$ en $d_y u$, en dus in het algemeen, zoo wel door $d_x^p u$ als door $d_x^p d_y^q u$ mag vervangen, waaruit verder de bedoelde eigenschap voor functien van twee veranderlijken terstond op te maken is. Zij kan overigens op gelijke wijze over functien van een willekeurig aantal veranderlijken uitgestrekt worden.

Bij toepassing alzoo der formule (8) op de bepaling der volledige tweede differentiaal eener functie u van drie afhankelijke veranderlijken x, y, z verkrijgt men derhalve, volgens de gebruikelijke notatie

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2 + \frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y + \frac{du}{dz}d^2z,$$

$$+ 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2n}{dxdz}dxdz + 2\frac{d^2u}{dydz}dydz.$$

Zij $y = uv$, en laten u en v functien zijn eener derde veranderlijke x, dan zullen wij, met behulp der formule (8), gemakkelijk eene algemeene uitdrukking voor de waarde van $d^n y$ bekomen. Immers $d_u y = vdu$, $d_v y = udv$, en dus $d_u^p y = vd^p u$, $d_v^p y = ud^p v$, $d^q d^p y = d_y^q u d_p^p v$ zijnde, hebben wij terstond

$$d^n y = d^n.uv = vd^n u + ndvd^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2v\, d^{n-2}u \,.\,. + ud^n v.$$

Is nu $u = f(x)$ en $v = F(x)$, dan kan men voor de zoo even gevondene uitdrukking ook de navolgende schrijven:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(x)\, f_n(x) + nF_1(x)\, f_{n-1}(x) + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}F_2(x) f_{n-2}(x) \,.\,. + F_n(x) f(x),$$

welke met die van § 31 overeenstemt.

Men neme bijv. $u = e^{ax}$ en $v = \frac{1}{x}$, dan is

$$\frac{d^pu}{dx^p} = f_p(x) = a^pe^{ax} \quad \text{en} \quad \frac{d^pv}{dx^p} = F_p(x) = \pm\frac{1.2\ldots p}{x^{p+1}}.$$

Derhalve

$$d^n\left(\frac{e^{ax}}{x}\right) = \frac{a^n.e^{ax}}{x}\left\{1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2x^2}\ldots \pm \frac{1.2\ldots n}{a^nx^n}\right\}dx^n.$$

Alleen in het bijzonder geval, waarin de grootheden x, y, z..., lineaire functien zijn van andere onafhankelijke veranderlijken x', y', z'..., of met andere woorden, functien voorstellen van den vorm $ax' + by' + cz' + \ldots$, zullen de beide formules (8), (9) dezelfde uitkomsten opleveren, vermits, dx', dy', dz'... standvastig zijnde, uit de betrekking $x = ax' + by' + cz'$, noodzakelijk voortvloeit $d^2x = 0$, en dus ook $d^2y = 0$ enz., waardoor d^p_xu, d^p_yu..., dezelfde waarden verkrijgen als $\frac{d^pu}{dx^p}dx^p$, $\frac{d^pu}{dy^p}dy^p$, enz.

§ 148. Heeft men tusschen drie veranderlijke grootheden x, y, z, de vergelijking

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

in welk geval eene derzelve, bijv. z, als eene niet ontwikkelde functie der beide overige x, y, beschouwd wordt, dan laten zich de volledige differentialen van verschillende orde der functie z, onmiddelijk afleiden uit die der functie

$$u = \varphi(x, y, z),$$

in de onderstelling van $u = 0$, waardoor dus gelijktijdig du, d^2u enz. verdwijnen, mits hierbij acht gevende, om dz, welke van dx en dy afhankelijk is, niet te gelijk met elk dezer beide laatsten als standvastig te behandelen, indien namelijk x en y van elkander onafhankelijk zijn, hetgeen bijv. het geval zal zijn, wanneer de vergelijking

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

die van een gebogen oppervlak voorstelt, waarbij de regtstandige coördinaten van eenig willekeurig punt door x, y, z aangewezen worden.

Wij hebben alzoo, door eene eerste differentiatie

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = 0 \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

waaruit volgt

$$dz = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}.dx + \frac{d\varphi}{dy}dy}{\frac{d\varphi}{dz}},$$

terwijl de partiële differentialen van z ten opzigte van x en y, zullen uitgedrukt worden door

$$d_xz = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dz}}.dx \quad . \quad d_yz = -\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dz}},$$

gevende wederom $dz = d_xz + d_yz$.

Uit de differentiatie van verg. (10) vindt men, met behulp der algemeene formule (8)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2\varphi}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2\varphi}{dz^2}dz^2 + 2\frac{d^2\varphi}{dxdy}dxdy$$
$$+ 2\frac{d^2\varphi}{dydz}dydz + 2\frac{d^2\varphi}{dxdz}dxdz + \frac{d\varphi}{dz}d^2z = 0. \quad . \ (11)$$

waaruit de volledige waarde der tweede differentiaal van z kan worden afgezonderd.

De partiële differentialen der tweede orde, ten opzigte van dezelfde veranderlijke x of y, zijn blijkbaar uit de voorgaande vergelijking af te leiden, door dy en dx daarin afzonderlijk gelijk nul te stellen. Wij verkrijgen alzoo, z beurtelings als eene functie van x of y alleen beschouwende,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\cdot\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{2d^2\varphi}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} = 0. \quad . \quad . \ (12)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\cdot\frac{dz^2}{dy^2} + \frac{2d^2\varphi}{dydz}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2z}{d\varphi^2} = 0. \quad . \quad . \ (13)$$

in welke vergelijkingen $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$ als partiële differentiaal-quotienten voorkomen.

Om het partiële differentiaal quotient der tweede orde $\frac{dxdy}{d^2z}$ te verkrijgen, behoeft men slechts de vergelijking

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0,$$

alleen ten aanzien van y en z te differentiëren. Hierdoor bekomt men, ter bepaling van $\frac{d^2z}{dxdz}$, de vergelijking

$$\frac{d^2\varphi}{dxdy}+\frac{d^2\varphi}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2\varphi}{dydz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx}+\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dxdy}=0 \quad (14)$$

Vermenigvuldigende de vergelijkingen (12), (13), (14) respectievelijk met dx^2, dy^2 en $2dxdy$, dan zal de som dezer producten, met in achtneming dat z eene functie van x en y zijnde, daaruit volgt

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy,$$

en $$d^2z=\frac{d^2z}{dx^2}dx^2+\frac{d^2z}{dy^2}dy^2+\frac{2d^2z}{dxdy},$$

wederom de vergel. (11) opleveren.

§ 149. Het voorgaande wijst van zelf den weg aan, dien men te volgen heeft bij dergelijke functien van drie of meer onafhankelijke veranderlijken, weshalve wij het overbodig achten hieromtrent in meerdere bijzonderheden te treden. Alleen zullen wij nog opmerken, dat, bijaldien eene of meer dezer veranderlijken, wederom functien van andere of van eene en dezelfde veranderlijke grootheid zijn, men in de ontwikkeling der hoogere differentiatien zal te letten hebben, om geene der differentialen van de onafhankelijke veranderlijken als standvastig te behandelen. Onderstellen wij bij voorbeeld, dat x, y, z aan elkander verbonden zijn, door de twee vergelijkingen

$$F(x,y,z)=0, \qquad f(x,y,z)=0,$$

zoo dat slechts eene der drie veranderlijken, x bijv. hier als onafhankelijke veranderlijke voorkomt, en dus y en z als functien van x te beschouwen zijn. De waarden van $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ kunnen terstond door eliminatie afgeleid worden uit de beide differentiaal vergelijkingen,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0,\\ \frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0.\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Deze op nieuw differentiërende, in de onderstelling, dat alleen dx standvastig is, verkrijgen wij voor de differentiaal vergelijkingen der tweede orde,

$$\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{d^2F}{dy^2}\cdot\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{d^2F}{dz^2}\cdot\frac{dz^2}{dx^2}+2\frac{d^2F}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$+2\frac{d^2F}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dx}+2\frac{d^2F}{dydz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}\cdot\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{d^2f}{dz^2}\cdot\frac{dz^2}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx}+2\frac{d^2f}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$+2\frac{d^2f}{dydz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}=0.$$

Na hierin de waarden van $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dz}{dx}$ gesubstitueerd te hebben, zal men uit die beide laatste vergelijkingen de waarden der tweede differentiaal-quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $\frac{d^2z}{dx^2}$ kunnen bepalen, welke echter insgelijks, door onmiddelijke differentiatie der, uit de vergelijkingen (15) afgeleide waarden van $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dz}{dx}$ te verkrijgen zijn; en men zal nu, op gelijke wijze, uitdrukkingen voor de differentiaal-quotienten van hoogere orden kunnen bekomen.

TWINTIGSTE LES.

Uitbreiding der reeksen van MACLAURIN *en* TAYLOR *op functiën van een willekeurig aantal veranderlijken.*

§ 150. De in de VIe Les betoogde reeksen van TAYLOR en MACLAURIN kunnen thans, met behulp der hiervoren verklaarde theorie, gemakkelijk op functiën van twee of meer veranderlijke elementen worden uitgebreid. Beschouwen wij namelijk vooreerst eene functie

$$z = f(x, y),$$

waarin x en y twee van elkander onafhankelijke veranderlijken voorstellen, dan komt het er op aan, de waarde z_1 te bepalen, welke de functie z verkrijgt, indien x en y respectivelijk de eindige aangroeijen Δx en Δy, of h en k ondergaan, dat is met andere woorden, om die waarde, te weten

$$z_1 = f(x + h, y + k),$$

in eene reeks, volgens de magten van k en h, te ontwikkelen.

Schrijven wij hierin voor k en h, kt en ht, dan kunnen wij z_1, als eene functie van t alleen beschouwd, met behulp der reeks van MACLAURIN, naar de magten van t ontwikkelen, en vervolgens $t = 1$ stellende, zullen wij hierdoor de begeerde waarde van z_1 verkrijgen.

Zij nog $x + ht = x'$ en $y + kt = y'$ gesteld, dan is

$$z_1 = f(x', y') = F(t).$$

dus

$$dz_1 = \frac{df}{dx'} dx' + \frac{df}{dy'} dy', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en aangezien x', y' hier als functiën van t voorkomen, heeft men voor het eerste differentiaal-quotient van z_1 ten opzigte van t,

$$\frac{dz_1}{dt} = F_1(t) = \frac{df}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dt} + \frac{df}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dt}.$$

Maar, volgens het betoogde in § 139, is

$$\frac{df}{dx'} = \frac{df}{dx}, \qquad \frac{df}{dy'} = \frac{df}{dy}.$$

Daarenboven heeft men $\frac{dx'}{dt} = h$, $\frac{dy'}{dt} = k$. Derhalve komt er

$$F(t) = \frac{dz_1}{dx} h + \frac{dz_1}{dy} k,$$

en, omdat in de vergel. (1), dx' en dy' bij het differentiëren ten opzigte van t, als standvastig mogen behandeld worden, zoo volgt uit deze bewerking,

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = F_2(t) = \frac{d^2z_1}{dx^2} h^2 + \frac{2\,d^2z_1}{dx\,dy} kh + \frac{d^2z_1}{dy^2} k^2,$$

en in het algemeen, zal men voor de n^o afgeleide functie van F, met behulp van den symbolischen vorm (9) van § 146, mogen schrijven,

$$F_n(t) = \left(\frac{dz_1}{dx} h + \frac{dz_1}{dy} k\right)^n,$$

en zulks onder dezelfde voorwaarde als aldaar uitgedrukt is.

Voor $t = 0$, z' in z_1 overgaande, heeft men insgelijks

$$F_n(o) = \left(\frac{dz}{dx} h + \frac{dz}{dy} k\right)^n,$$

en daar de reeks van Maclaurin, voor $t = 1$ geeft,

$$F(t) = F(0) + F_1(0) + \frac{1}{1.2} F_2(0) + \frac{1}{1.2.3} F_3(0) + \ldots \quad (2)$$

bekomt men eindelijk voor de gevraagde ontwikkeling

$$\left.\begin{aligned} F(x+h,\, y+k) = \\ z + \frac{dz}{dx} h + \frac{d^2z}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{enz.} \\ + \frac{dz}{dy} k + \frac{2\,d^2z}{dx\,dy} \frac{kh}{1.2} + \frac{3\,d^3z}{dx^2dy} \frac{h^2k}{1.2.3} + \text{enz.} \\ + \frac{d^2z}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} + \frac{3\,d^3z}{dx\,d^2y} \frac{hk^2}{1.2.3} + \text{enz.} \\ + \frac{d^3z}{dy^3} \frac{k^3}{1.2.3} + \text{enz.} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

§ 151. Even als de reeks van Taylor tot op een bepaald aantal termen kan worden voortgezet, zal zulks ook met de voorgaande kunnen geschieden. Te dien einde hebbe men slechts voor den laatsten term in de reeks (2), te schrijven (§ 52)

$$\frac{1}{1.2.3..n} F_n(i),$$

en daar $F(i)$ de waarde voorstelt van $f(x+ih, y+ik)$, i steeds < 1 zijnde, zal de vertikale kolom waarmede de reeks besloten wordt, uit de navolgende termen bestaan:

$$\frac{d^nz}{dx^n}\frac{h^n}{1.2.3.n}+\frac{n\,d^nz}{dx^{n-1}dy}\frac{h^{n-1}k}{1.2.3.n}\ldots+\frac{d^nz}{dy^n}\frac{k^n}{1.2.3.n},$$

mits, na ontwikkeling der onderscheidene partiële differentiaal coëfficienten van z, de x en y daarin door $x+ih$, y en $+ik$ vervangende. De som dezer termen stelt alsdan de rest der reeks voor, ingeval men haar afbreekt bij de termen, die met de differentiaal-quotienten van de $(n-1)^e$ orde zijn aangedaan. Nadert die som meer en meer tot nul naarmate n toeneemt, dan zal de reeks (3) convergent zijn.

Uit de wijze, waarop die reeks verkregen is, volgt tevens dat hare geldigheid aan de voorwaarde verbonden is, dat de differentiaal-quotienten van verschillende orden onafgebroken functien zijn tusschen x en $x+h$, en tusschen y en $y+k$.

§ 152. Door in de functie z en hare differentiaal-quotienten, x en y gelijk nul te stellen, en vervolgens h en k, door x, y te vervangen, gaat de reeks (3) over in die van Maclaurin, uitgestrekt over functiën van twee veranderlijke grootheden. Indien wij de waarden der differentiaal-quotienten

$$\frac{d^nz}{dx^n},\quad \frac{d^{m+n}z}{dx^mdy^n},\quad \frac{d^nz}{dy^n},$$

in de onderstelling van $x=0$, $y=0$, aanduiden door

$$\left(\frac{d^nz}{dx^n}\right)_0,\quad \left(\frac{d^{m+n}z}{dx^mdy^n}\right)_0,\quad \left(\frac{d^nz}{dy^n}\right)_0,$$

dan ontstaat hieruit, voor de ontwikkeling van $f(x, y)$ naar de opklimmende magten van x, y, de reeks

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) = f(0,0) &+ \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0\frac{x^2}{1.2}+\text{enz.}\\ &+\left(\frac{dz}{dy}\right)_0 y + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)_0\frac{xy}{1.2}+\text{enz.}\\ &+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)_0\frac{y^2}{1.2}+\text{enz.}\end{aligned}\right\}\quad .\ (4)$$

Wil men de reeks bij de n^e magten van x, y afbreken, dan zal men in de differentiaal-quotienten waarmede zij aangedaan zijn, voor x, ix, en voor y, iy moeten schrijven. De waarden van i, waarbij

die functiën hare grootste en kleinste waarden verkrijgen, zullen twee grenzen opleveren, tusschen welke de ontwikkeling van $f(x, y)$ steeds besloten blijft; en zulks geldt eveneens van de reeks, die de ontwikkeling van $f(x+h, y+k)$ voorstelt.

§ 153. Stelt men in de reeks (3), $h = dx$ en $k = dy$, dan gaat de algemeene vorm

$$\left(\frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}k\right)^n,$$

over in $d^n z$, en dus de reeks zelve in

$$f(x+dx, y+dy) = z + dz + \frac{d^2z}{1.2} + \frac{d^3z}{1.2.3} + \text{enz.} \quad . \quad . \quad (5)$$

welke de volledige oneindig kleine aangroeijing der functie z uitdrukt, ingeval de differentialen der hoogere orden daarin behouden worden. Zij zou tevens, onder dezen vereenvoudigden vorm, de waarde van $f(x+h, y+k)$ kunnen voorstellen, mits bij de ontwikkeling der volledige differentialen van z, de factoren dx, dy, door de eindige aangroeijingen h en k vervangende; en men zal gemakkelijk inzien, dat zij alsdan tevens van toepassing wordt op functiën van een willekeurig aantal veranderlijken, hetzij deze geheel of gedeeltelijk van elkander onafhankelijk zijn. Dezelfde reeks (5) is daarenboven vatbaar, om onder een' symbolischen vorm aldus voorgesteld te worden:

$$f(x+dx, y+dy) = (e^d)\, z.$$

In het geval van eindige aangroeijingen, kan men dan ook voor functiën van twee of meer veranderlijke elementen schrijven:

$$f(x+h, y+k, z+n\ldots) = \left(e^{d_x + d_y + d_z + \ldots}\right) U,$$

onder voorwaarde nogtans om, na ontwikkeling in eene reeks en aanwijzing der partiële differentialen van verschillende orden, volgens de gewone notatie, de factoren dx, dy, dz.. overal door h, k, n... te vervangen.

EEN EN TWINTIGSTE LES.

Onderzoek der maxima en minima bij functiën van twee of meer veranderlijke grootheden.

(*Voortzetting der VIIIe Les.*)

§ 154. De in de *VIIIe Les* behandelde theorie der maxima en minima, had eeniglijk betrekking op functien van slechts eene veranderlijke grootheid. Wij kunnen haar thans gemakkelijk op functien van twee of meer veranderlijke uitbreiden.

Eene functie $z = f(x, y)$ van twee onafhankelijke veranderlijken, wordt gezegd voor twee bijzondere waarden x_0, y_0 dezer veranderlijken, haar *maximum* of *minimum* te bereiken, zoodra $f(x_0 + h,\ y_0 + k)$ voor alle mogelijke positieve of negatieve waarden van h en k, hoe klein ook genomen, *kleiner* of *grooter* wordt dan $f(x_0, y_0)$.

In het eerste geval zal het verschil

$$f(x + h,\ y + k) - f(x, y),$$

steeds negatief, en in het laatste steeds positief zijn, voor positieve of negatieve oneindig kleine aangroeijingen h, k.

Dezelfde eigenschap moet ook blijven bestaan, indien h of k afzonderlijk gelijk nul gesteld, en de functie z dus beschouwd wordt als van eene enkele veranderlijke grootheid af te hangen, zoodat de eerste noodzakelijke voorwaarden van het maximum of minimum zijn

$$\frac{dz}{dx} = 0, \qquad \frac{dz}{dy} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

ten ware het bijzonder geval plaats had, dat beide deze differentiaal quotienten gelijktijdig of slechts een derzelven oneindig groot werden.

Volgens de algemeene ontwikkeling van $f(x + h,\ y + k)$, kan men dan, in het geval van eenig maximum of minimum, stellen (§ 151)

$$f(x + h,\ y + k) - f(x, y) = \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2z'}{dx^2}h^2 + \frac{2d^2z'}{xdy}kh + \frac{d^2z'}{dy^2}k^2\right\},$$

indien namelijk $\frac{d^2z'}{dx^2}$, $\frac{d^2z'}{dxdy}$, $\frac{d^2z'}{dy^2}$, de waarden aanduiden, welke de drie partiële differentiaal quotienten der tweede orde verkrijgen, nadat daarin x en y door $x+ih$, en $y+ik$ vervangen zijn.

Is nu geen dezer drie differentiaal quotienten nul voor de waarden van x, y, die aan het stelsel vergelijkingen (1) voldoen, dan zal voor afnemende waarden van h, en k, het teeken van het verschil

$$f(x+h, (y+k)) - f(x, y),$$

moeten overeenstemmen met dat der drieledige uitdrukking

$$\frac{d^2z}{dx^2}h^2 + \frac{2d^2z}{dxdy}kh + \frac{d^2z}{dy^2}k^2 \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

Beschouwt men nu z als eene functie van x of van y alleen, dan zal tot het bestaan van het minimum of maximum gevorderd worden, dat $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ beiden positief of beiden negatief zijn, voor de bijzondere waarden $x = x_0$, $y = y_0$, welke $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{dz}{dy}$ nul maken.

Opdat echter de grootheid (A), voor alle waarden van h en k, in het geval van een minimum of maximum, eene positieve of negatieve waarde behoude, is het niet genoegzaam, dat $\frac{d^2z}{dx^2}$ en $\frac{d^2z}{dy^2}$ beiden positief of negatief zijn, maar deze laatste functien zullen tevens aan de voorwaarde

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} > \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2,$$

behooren te voldoen.

Immers, de drie functien $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ kortheidshalve door P, Q, R aanduidende, zoo kunnen wij de uitdrukking (A) ook onder dezen vorm schrijven,

$$Pk^2\left\{\left(\frac{h}{k}\right)^2 + \frac{2R}{P}\frac{h}{k} + \frac{Q}{P}\right\} = Pk^2\left\{\left(\frac{h}{k} + \frac{R}{P}\right)^2 + \frac{PQ-R^2}{P^2}\right\},$$

en hieruit volgt onmiddelijk, dat zij alleen dan voor alle mogelijke waarden van h en k met hetzelfde teeken zal aangedaan blijven, bijaldien $PQ =$ of $> R^2$ is, waartoe tevens gevorderd wordt, dat P en Q hetzelfde teeken bezitten. Aan deze voorwaarde voldaan zijnde, zal het teeken van (A) met dat van P en dus ook met dat van Q overeenstemmen. Wij kunnen derhalve hieruit tot den volgenden regel besluiten, om te onderzoeken of eenige functie z van twee onafhankelijke elementen, al dan niet voor maxima of minima vatbaar zij.

Men losse de vergelijkingen $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$, *ten aanzien van* x *en* y *op, en substituëre de verkregene waarden* $x = x_0$, $y = y_0$ *in de drie partiële differentiaal verhoudingen* $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$. *Blijkt hieruit dat* $\frac{d^2z}{dx^2}.\frac{d^2z}{dy^2} < \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$ *is, dan kan er geen maximum noch minimum bestaan.*

In het tegenovergestelde geval zal z *een maximum of minimum worden, naardat de verhoudingen* $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ *beiden gelijktijdig negatief of positief zijn.*

Worden echter $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ gelijktijdig nul, terwijl $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ eene eindige positieve of negatieve waarde verkrijgt, dan toont de uitdrukking (A) reeds van zelve aan, dat het maximum of minimum in dat geval onmogelijk wordt, en zulks uithoofde het teeken van (A) alsdan te gelijk met dat van *h* en *k* verandert.

Het kan gebeuren, dat $\frac{d^2z}{dxdy}$ gelijktijdig met de beide overige differentiaal-quotienten der tweede orde verdwijnt. Tot het bestaan van het maximum of minimum wordt alsdan gevorderd, dat elk der differentiaal-quotienten van de derde orde insgelijks nul zij, en de som der termen, welke ten aanzien van *h* en *k* van den vierden graad zijn, hetzelfde teeken behoude voor alle mogelijke waarden van *h* en *k*, te weten, het negatieve voor het maximum, en het positieve voor het minimum, waaruit klaarblijkelijk meer zamengestelde voorwaarden zullen ontstaan. Het zal onnoodig zijn hierbij te herinneren, dat het voorgaande gegrond is op de onderstelling, dat geen der differentiaal-quotienten van *z*, voor $x = x_0$ of $y = y_0$, oneindig groote waarden bekome. In het tegenovergestelde geval zou het onderzoek naar het bestaan van maxima of minima, op gelijke wijze behooren te geschieden als vroeger, met betrekking tot de functiën van ééne veranderlijke grootheid, aangetoond is.

§ 155. Wij zullen nu enkele voorbeelden, ter toepassing van de zoo even verklaarde theorie, laten volgen.

1°. *Men vraagt onder alle driehoeken van gelijken omtrek of perimeter diengene te bepalen, welks inhoud een maximum zij.*

Stellende voor de zijden en den omtrek des driehoeks *x*, *y*, *z*, 2*a*, dan is

$$a = \frac{x + y + z}{2}, \quad \text{of} \quad z = 2a - (x + y).$$

Derhalve moet de functie

$$\sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)} = \sqrt{a(a-x)(a-y)(x+y-a)},$$

en dus ook de functie

$$u = (a-x)\,(a-y)\,(x+y-a)$$

een maximum zijn. De vergelijkingen

$$\frac{du}{dx} = 0, \qquad \frac{du}{dy} = 0,$$

geven hier, ter bepaling van x en y,

$$(a-y)\{a-x-(x+y-a)\} = 0.$$

$$(a-x)\{a-y-(x+y-a)\} = 0.$$

Hier kan voldaan worden

1°. door $y = a$, en $x = a$,

2°. door $x = y = \frac{2}{3}a$ te stellen.

Het eerste stelsel waarden kan niet in aanmerking komen, uit hoofde $x + y = z$ zou worden, strijdig met de eigenschap des driehoeks. Om nu te onderzoeken of de beide andere waarden werkelijk een maximum voor u opleveren, differentiëre men de vergelijkingen

$$\frac{du}{dx} = (a-y)\,(2a-2x-y). \quad \frac{du}{dy} = (a-x)\{2a-x-2y\},$$

ten aanzien van x en y, dan komt er, in de onderstelling van

$$\frac{du}{dx} = 0, \; \frac{du}{dy} = 0.$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -2(a-y). \quad \frac{d^2u}{dy^2} = -2(a-x). \quad \frac{d^2u}{dxdy} = -(a-y).$$

of $$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2a}{3}. \quad \frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{2a}{3}. \quad \frac{d^2u}{dxdy} = -\frac{a}{3}.$$

Daar nu $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ beiden negatief zijn, en daarenboven hun pro-product $> \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2$ is, wordt hierdoor het bestaan des maximums aangewezen.

Hieruit blijkt alzoo, dat de gelijkzijdige driehoek onder alle overige driehoeken van gelijken perimeter, den grootst mogelijken inhoud oplevert.

2°. *Onder alle driehoeken, die in een gegeven cirkel kunnen beschreven worden, den genen te bepalen, welks inhoud een maximum zij.*

Zij ABC (*fig.* 52) een driehoek in een cirkel van den straal r be-

schreven; hoek $A = x$, hoek $B = y$ en hoek $C = 180^0 - x - y$, dan heeft men blijkbaar

$$BC = 2r \sin. x, \quad AC = 2r \sin. y,$$

en dus Inh. drieh. $= \frac{1}{2} AC . BC . \sin. C$

$$= 2r^2 \sin. x . \sin. y . \sin. (x + y) \text{ een maximum.}$$

Zij dan $\quad z = \sin. x . \sin. y . \sin. (x + y),$

dus $\quad \frac{dz}{dx} = \sin. y . \sin. (2x + y) = 0,$

$$\frac{dz}{dy} = \sin. x . \sin. (2y + x) = 0.$$

en omdat $\sin. y = 0$, en $\sin. x = 0$ hier niet in aanmerking kunnen komen, stelle men

$$\sin. (2x + y) = \sin. (2y + x) = 0,$$

waaruit volgt $\quad x = y = \frac{\pi}{3}.$

Verder heeft men

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2 \sin. y \cos. (2x + y) = 2 \sin. x \cos. 3x = - 2 \sin. x,$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = 2 \sin. x \cos. (2y + x) = - 2 \sin. x,$$

$$\frac{d^2z}{dydx} = \sin. y \cos. (2x + y) = - \sin. x,$$

Daar nu $\frac{d^2z}{dx^2} . \frac{d^2z}{dy^2} > \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)^2$ is, zoo duiden de negatieve teekens van $\frac{d^2z}{dx^2}$ en $\frac{d^2z}{dy^2}$ aan, dat de in den cirkel beschreven gelijkzijdige driehoek den grootsten inhoud bezit

3°. *Onder alle driehoeken, welke om een gegeven cirkel kunnen beschreven worden, den genen te bepalen, welks inhoud een minimum zij.*

Zij ABC (*fig.* 53) een driehoek om een cirkel van den straal r beschreven. Stellen wij de hoeken A en $B = 2x$ en $2y$, dan volgt uit de eigenschappen des ingeschreven cirkels,

$$AB = r(\cot. x + \cot. y), \quad BC = r(\cot. y + tg(x + y)),$$

$$\text{en} \quad AC = r(\cot. x + tg(x + y))$$

$$\frac{1}{2}(AB + AC + BC) = r(\cot. x + \cot. y + tg(x + y)).$$

Derhalve zal de functie

$$z = cot.\,x + cot.\,y + tg.(x+y),$$

een minimum moeten zijn.

De vergelijkingen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{cos.^2(x+y)} - \frac{1}{sin.^2 x} = 0,$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{cos.^2(x+y)} - \frac{1}{sin.^2 y} = 0,$$

geven $$x = y = \frac{\pi}{6}.$$

Wijders hebben wij

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2\,sin.(x+y)}{cos.^3(x+y)} + \frac{2\,cos.\,x}{sin.^3 x} = \frac{4\,cos.\,x}{sin.^3 x} = 16\sqrt{3},$$

$$\frac{d^2z}{dydx} = \frac{2\,sin.(x+y)}{cos.^3(x+y)} = 8\sqrt{3}.$$

dus $$\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} > \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)^2, \quad \frac{d^2z}{dx^2} > 0, \quad \frac{d^2z}{dy^2} > 0.$$

Onder alle omgeschreven driehoeken zal derhalve de gelijkzijdige driehoek den kleinst mogelijken inhoud opleveren.

4°. *Drie punten* A, B, C *gegeven zijnde, begeert men in hun vlak een vierde punt* P *te bepalen, zoodat de som der afstanden* PA, PB, PC *een minimum zij.*

Men stelle voor de regthoekige coördinaten der drie gegeven punten (a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), en voor die van het gezochte punt x, y; voorts de afstanden $PA = z$, $PB = z_1$, $PC = z_2$, dan heeft men de waarden van x en y te bepalen, welke de functie

$$u = z + z_1 + z_2,$$

tot een minimum maken; zijnde hierin

$$z = \sqrt{((x-a)^2 + (y-b)^2)},$$

$$z_1 = \sqrt{((x-a_1)^2 + (y-b_1)^2)},$$

$$z_2 = (\sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2}),$$

waaruit volgt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x-a}{z}, \quad \frac{dz_1}{dx} = \frac{x-a_1}{z_1}, \quad \frac{dz_2}{dx} = \frac{x-a_2}{z_2},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y-b}{z}, \quad \frac{dz_1}{dy} = \frac{y-b_1}{z_1}, \quad \frac{dz_2}{dy} = \frac{y-b_2}{z_2}.$$

De vergelijkingen

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0,$$

geven derhalve, ter bepaling van x en y,

$$\frac{x-a}{z} + \frac{x-a_1}{z_1} + \frac{x-a_2}{z_2} = 0.$$

$$\frac{y-b}{z} + \frac{y-b_1}{z_1} + \frac{y-b_2}{z_2} = 0.$$

Het valt gemakkelijk in te zien, dat de termen dezer twee vergelijkingen respectievelijk voorstellen de cosinussen en de sinussen der hoeken φ, φ_1, φ_2, welke de lijnen PA, PB, PC, volgens de gewone wijze van telling, met de as der x vormen. Tusschen deze drie hoeken bestaan alzoo de betrekkingen

$$cos.\,\varphi + cos.\,\varphi_1 = -\,cos.\,\varphi_2,$$

$$sin.\,\varphi + sin.\,\varphi_1 = -\,sin.\,\varphi_2,$$

waaruit volgt

$$2 + 2\,cos.\,(\varphi - \varphi_1) = 1,$$

of

$$cos.\,(\varphi_1 - \varphi) = -\frac{1}{2},$$

en op gelijke wijze

$$cos.\,(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{1}{2}, \quad \text{en} \quad cos.\,(\varphi - \varphi_2) = -\frac{1}{2}.$$

Daar nu de verschillen tusschen de hoeken φ, φ_1, φ_2, de hoeken voorstellen, welke de lijnen PA, PB, PC onderling vormen, zoo blijkt hieruit, dat elk dezer hoeken 120° bedraagt, en het punt P dus binnen den driehoek ABC moet gelegen zijn, en wel zoodanig, dat deze drie lijnen met elkander gelijke hoeken maken.

Er blijft thans nog overig te onderzoeken, of de som der drie gemelde afstanden werkelijk een minimum zij.

Nu is

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z_1}{dx^2} + \frac{d^2z_2}{dx^2}.$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2z_1}{dy^2} + \frac{d^2z_2}{dy^2},$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2z}{dxdy} + \text{enz.}$$

Wijders volgt uit de waarden van

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x-a}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{y-b}{z},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{(x-a)^2}{z^2}\right) = \frac{sin.^2\varphi}{z},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{1}{z}\left(1 - \left(\frac{y-b}{z}\right)^2\right) = \frac{cos.^2\varphi}{z},$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = -\frac{(x-a)}{z^2}\frac{dz}{dy} = -\frac{(x-a)(y-b)}{z^3} = -\frac{sin.\,\varphi\,cos.\,\varphi}{z}.$$

Derhalve

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{sin.^2\,\varphi}{z} + \frac{sin.^2\,\varphi_1}{z_1} + \frac{sin.^2\,\varphi_2}{z_2} > 0,$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{cos.^2\,\varphi}{z} + \frac{cos.^2\,\varphi_1}{z_1} + \frac{cos.^2\,\varphi_2}{z_2} > 0,$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = -\frac{1}{2}\left(\frac{sin.\,2\varphi}{z} + \frac{sin.\,2\varphi_1}{z_1} + \frac{sin.\,2\varphi_2}{z_2}\right).$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 = \frac{sin.^2\,(\varphi-\varphi_1)}{zz_1} + \frac{sin.^2\,(\varphi-\varphi_2)}{zz_2} + \frac{sin.^2(\varphi_1-\varphi_2)}{z_1z_2} > 0.$$

Uit al hetwelk op te maken is, dat de functie u een minimum wordt, ingeval het punt P op de hiervoren vermelde wijze bepaald is, hetgeen door eene bekende meetkunstige constructie gemakkelijk geschieden kan.

De lengten der drie afstanden PA, PB, PC laten zich overigens op gelijke wijze als in het problema van Snellius berekenen, waardoor dus insgelijks de ligging van het punt P bepaald is.

5°. *Op twee gegevene en in hetzelfde vlak liggende kromme lijnen twee punten te bepalen, welker afstand een maximum of minimum zij.*

Men noeme x, y de coördinaten van het punt op de eene, en x', y' die van het punt op de andere kromme, dan zal de functie

$$z = (y'-y)^2 + (x'-x)^2,$$

een maximum of minimum moeten worden. Beschouwt men y en y' respectivelijk als functiën van x en x', dan is z eene functie der

twee van elkander onafhankelijke elementen x, x', welke aan de vergelijkingen

$$\frac{dz}{dx} = -2(y' - y)\frac{dy}{dx} - 2(x' - x) = 0,$$

$$\frac{dz}{dx'} = 2(y' - y)\frac{dy'}{dx'} + 2(x' - x) = 0,$$

behooren te voldoen. Hieruit volgt terstond

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}.$$

De eerste der voorgaande vergelijkingen is die der normaal door het punt (x, y) der eerste kromme, en de tweede die der normaal door het punt (x', y') der tweede kromme getrokken. Het blijkt alzoo, dat de lijn, die de punten (x, y), (x', y') vereenigt, eene gemeenschappelijke normaal aan de beide krommen zal moeten zijn.

Voor de waarden der differentiaal-quotienten van de tweede orde, heeft men, in de onderstelling van $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 2\left\{-(y' - y)\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} + 1\right\},$$

$$\frac{d^2 z}{dx'^2} = 2\left\{(y' - y)\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} + 1\right\},$$

$$\frac{d^2 z}{dx dx'} = -2\left\{1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right\}.$$

Passen wij deze algemeene formules toe op het bepalen van den kortsten afstand tusschen eene regte lijn en een' cirkel, tot vergelijkingen hebbende

$$y = x\, tg.\, a, \qquad (x' - a)^2 + (y' - b)^2 = r^2,$$

dan volgt uit de voorwaarde $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$,

$$(x' - a) + (y' - b)\, tg.\, a = 0,$$

dus $(y' - b)^2\, (tg^2.\, a + 1) = r^2$, of $y' - b = \pm\, r \cos.\, a$,

en $(x' - a)^2\, (cot.^2 a + 1) = r^2$, of $x' - a = \mp\, r \sin.\, a$.

Wijders geeft de vergel. $\frac{dz}{dx} = 0$,

$$(y' - y)\, tg.\, a + x' - x = 0,$$

of

$$y' \sin.\, a + x' \cos.\, a = x \sec.\, a,$$

dus $\quad (b \pm r\cos. a)\sin. a + (a \mp r\sin. a)\cos. a = x\sec. a,$

waaruit $\quad x = (b\sin. a + a\cos. a)\cos. a,$

en $\quad y = (b\sin. a + a\cos. a)\sin. a,$

zoodat de vier coördinaten der onbekende punten thans bepaald zijn.

De gemeenschappelijke normaal is hier de loodlijn CD (*fig.* 55) uit het middenpunt C des cirkels op de gegeven lijn AB getrokken. De zoo even gevondene waarden voor de coördinaten der snijpunten D, E of E' stemmen overeen met die, welke men gemakkelijk uit de figuur zelve kan afleiden. Er blijft thans nog overig het bestaan van het minimum aan de differentiaal-quotienten der tweede orde te toetsen. Te dien einde heeft men, omdat hier

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ en } \frac{d^2y'}{dx'^2} = -\frac{r^2}{(y'-b)^3} = \mp\frac{1}{r\cos.^3 a} \text{ is,}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right) = 2\sec^2 a,$$

$$\frac{d^2z}{dx'^2} = 2\left\{\frac{b \pm r\cos.a - (b\sin.a + a\cos.a)\sin.a}{\mp r\cos^3 a} + \sec.^2 a\right\}$$

$$= \mp 2\left(\frac{b\cos.a - a\sin.a}{r\cos.^2 a}\right),$$

geldende hier het bovenste teeken voor het punt E', en het benedenste voor het punt E. Daar nu $\frac{d^2z}{dx^2}$ steeds een positief teeken behoudt, zal $\frac{d^2z}{dx'^2}$ in het punt E' van hetzelfde teeken zijn, indien $b < a\,tg\,a$ is, en in het punt E, indien $b > a\,tg\,a$, zoo als in onze figuur het geval is, uithoofde aldaar het punt C buiten den hoek BOX gelegen is.

Wij hebben alsdan

$$\frac{d^2z}{dx^2} \times \frac{d^2z}{dx'^2} = 4\frac{(b\cos.a - a\sin.a)}{r\cos.^4 a},$$

$$\frac{d^2z}{dxdx'} = -2(1 + tg^2 a) = -2\sec.^2 a.$$

Derhalve

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dx'^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdx'}\right)^2 = 4\left(\frac{b\cos.a - a\sin.a - r}{r\cos.^4 a}\right),$$

welk verschil alleen dan positief wordt, indien de afstand $CD > CE$ is, zoo als in fig. 55 plaats vindt. Hieruit volgt alzoo, dat de afstand

ED werkelijk een minimum is. Door den cirkel binnen den hoek *BOX* te plaatsen, zal men van het benedenste teeken alsdan gebruik makende, insgelijks tot het bestaan des minimums kunnen besluiten.

Wij laten het aan den lezer over de voorgaande formules op twee cirkels of op andere bekende krommen van toepassing te maken. Zie hier nog enkele vraagstukken ter verdere oefening in de leer der maxima en minima.

1°. *Onder alle regthoekige parallelopipeda van hetzelfde oppervlak, datgene te bepalen, welks inhoud een maximum zij.*

2°. *Onder alle regthoekige parallelopipeda van gelijken inhoud, datgene te bepalen, waarvan het oppervlak een minimum zij.*

3°. *Onder alle parallelopipeda die in een gegeven bol kunnen beschreven worden, datgene te bepalen, hetwelk den grootsten inhoud bezit.*

§ 156. Voor functien van een willekeurig aantal veranderlijken kunnen wij de voorwaarden voor het bestaan van maxima en minima op eene algemeene wijze aldus vinden.

Zij $$U = f(x, y, z, t, u \ldots).$$

Laten de veranderlijke elementen $x, y, z \ldots$ respectivelijk met ah, ak, $al \ldots$ aangroeijen, en U hierdoor in U' overgaan, dan zal deze laatste als eene functie van a mogen beschouwd worden. Men stelle dienvolgens

$$U' = F(a), \quad \text{dus} \quad U = F(0).$$

Moet nu $F(a)$, voor $a = 0$ een maximum of minimum worden, zoo heeft men in dat geval

$$F_1(0) = 0,$$

en $F_2(0)$ negatief of positief; en in het algemeen zal het differentiaal quotient van $F(a)$, hetwelk voor $a = 0$ niet verdwijnt, van eene evene orde moeten zijn. Hierbij wordt wederom stilzwijgend ondersteld, dat geene der afgeleide functien van U', voor $a = 0$, oneindig groote waarden bekome.

Stellende nog $$x + ah = x', \quad y + ak = y' \text{ enz.},$$

en derhalve $$U' = f(x', y', z', \ldots .),$$

dan zal de volledige waarde van dU', in aanmerking nemende, dat

$$\frac{dU'}{dx_1} = \frac{dU'}{dx}, \quad \frac{dU'}{dy'_1} = \frac{dU'}{dy} \text{ enz.},$$

tot waarde hebben

$$dU' = \frac{dU'}{dx}dx' + \frac{dU'}{dy}dy' + \frac{dU'}{dz}dz' + \ldots \quad (2)$$

Derhalve

$$F_1(a) = \frac{dU'}{da} = \frac{dU'}{dx}h + \frac{dU'}{dy}k + \frac{dU'}{dz}l + \ldots,$$

en daar U', voor $a = 0$, in U overgaat, heeft men

$$F_1(0) = \frac{dU}{dx}h + \frac{dU}{dy}k + \frac{dU}{dz}l + \ldots,$$

welke uitdrukking voor alle mogelijke waarden van h, k, l... niet nul kan worden, tenzij men afzonderlijke hebbe

$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} = 0, \quad \frac{dU}{dz} = 0 \text{ enz.}$$

Deze vergelijkingen bevatten de eerste voorwaarden, waaraan voldaan moet worden door de bijzondere waarden van x, y, z... die de functie U tot een maximum of minimum maken.

Voor de waarde van $F_2(0)$ vindt men gemakkelijk uit (2),

$$F_2(0) = \frac{d^2U}{dx^2}h^2 + \frac{d^2U}{dy^2}k^2 + \frac{d^2U}{dz^2}l^2 + \ldots$$
$$+ 2\frac{d^2U}{dx\,dy}hk + 2\frac{d^2U}{dx\,dz}hl + \ldots,$$

welke voor alle waarden van h, k, l, in het geval van maximum negatief, en in het geval van minimum, positief behoort te zijn. De daartoe vereischte voorwaarden zullen blijkbaar des te zamengestelder worden, naarmate het aantal onafhankelijke elementen x, y, z, toeneemt.

Voor drie veranderlijken x, y, z bijv., zou men aldus behooren te werk te gaan, om de voorwaarden tot het bestaan van een maximum of minimum te leeren kennen. Men stelle kortheidshalve

$$\frac{d^2U}{dx^2} = A, \quad \frac{d^2U}{dy^2} = B, \quad \frac{d^2U}{dz^2} = C,$$

$$\frac{d^2U}{dxdy} = D, \quad \frac{d^2U}{dxdz} = E, \quad \frac{d^2U}{dydz} = F,$$

dan zal de uitdrukking

$$Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl,$$

of hetgeen hetzelfde is

$$A\frac{h^2}{l^2} + B\frac{k^2}{l^2} + C + 2D\frac{hk}{l^2} + 2E\frac{h}{l} + 2F\frac{k}{l},$$

steeds positief of negatief moeten zijn. Stellende nog

$$\frac{h}{l} = p \text{ en } \frac{k}{l} = q,$$

dan zal de vergelijking

$$Ap^2 + Bq^2 + 2Dpq + 2Ep + 2Fq + C = 0 \quad . \quad . \quad (3)$$

ten aanzien van p opgelost, onbestaanbare of gelijke wortels moeten hebben, waartoe gevorderd wordt, dat

$$A\{Bq^2 + 2Fq + C\} - (Dq + E)^2 > \text{ of } = 0,$$

of $\quad (AB - D^2)\,q^2 + 2(AF - DE)\,q + AC - E^2 > = 0$ zij,

en hieraan kan, voor alle waarden van q, alleen dan voldaan worden, indien

1°. $AB > D^2$ en 2°. $(AB - D^2)\,(AC - E^2) > (AF - DE)^2$,

waaruit tevens volgt

3°. $AC > E^2$.

Is nu aan elke der drie laatste voorwaarden voldaan, dan wordt daarenboven tot het bestaan van een maximum gevorderd,

$$A < 0, \quad B < 0, \quad C < 0,$$

en voor het minimum

$$A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0.$$

Had men de vergelijking (3) ten aanzien van q opgelost, de uitkomsten zouden van de vorigen alleen hierin verschillen, dat A en B zoo mede E en F onderling verwisseld zouden zijn. De eerste der drie gevondene voorwaarden bleef alsdan dezelfde; de tweede daarentegen, welke ook aldus kan voorgesteld worden

$$A\{ABC - CD^2 - BE^2 - AF^2 - 2DEF\} > 0,$$

gaat, na de gemelde letter-verwisseling, over in

$$B\{ABC - CD^2 - AF^2 - BE^2 - 2DEF\} > 0,$$

en aangezien A en B steeds met hetzelfde teeken moeten aangedaan zijn, bevatten beide uitkomsten slechts eene en dezelfde voorwaarde.

Strikt genomen is dienvolgens het bestaan van een maximum

of minimum eeniglijk verbonden aan de twee navolgende voorwaarden,

1°. $AB > D^2$, 2°. $(AB - D^2)(AC - E^2) > (AF - DE)^2$,

voor welke laatste even goed geschreven kan worden

$$(AB - D^2)(BC - F^2) > (BE - DF)^2,$$

terwijl daarenboven het positieve of negatieve teeken van A zal aanduiden of er minimum dan wel maximum plaats vindt.

Mogten echter de zes grootheden A, B, C, D, E voor de waarden van x, y, z, welke aan de vergelijkingen

$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} = 0, \quad \frac{dU}{dz} = 0$$

voldoen, gelijktijdig nul worden, dan zoude ook $\frac{d^3F(a)}{da^3}$ moeten verdwijnen, doch $\frac{d^4F(a)}{da^4}$ eene eindige waarde verkrijgen, waaruit alsdan de voorwaarden voor het bestaan des maximums of minimums af te leiden zijn. Wij zullen ons echter met dat onderzoek hier niet verder inlaten, dewijl de uitkomsten slechts zeldzaam eene toepassing zouden vinden.

§ 157. Beschouwen wij nog het geval, dat de functie $U = f(x, y, z)$ een maximum of minimum moet worden, en zulks in de onderstelling, dat de drie veranderlijken x, y, z tevens aan elkander verbonden zijn door de vergelijking

$$F(x, y, z) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

zoodat z hier als eene ingewikkelde functie van x en y voorkomt.

Daar x en y van elkander onafhankelijk zijn, heeft men in de eerste plaats te voldoen aan de voorwaarden

$$\frac{dU}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\frac{dU}{dy} = \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Wijders geeft de vergelijking (4) nog

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

Na eliminatie van $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ tusschen de vier voorgaande vergelij-

kingen, verkrijgt men twee anderen, die, in vereeniging met de vergel. (4), voldoende zullen zijn ter bepaling der waarden van x, y, z, welke de gegevene functie U tot een maximum of minimum maken.

Men zal wijders, door differentiatie, uit de vergelijkingen (5) (6) de waarden van $\frac{d^2U}{dx^2}$, $\frac{d^2U}{dy^2}$, $\frac{d^2U}{dx\,dy}$, in functie van x, y, z kunnen afleiden, en hieraan vervolgens het bestaan der maxima en minima, ingevolge het vroeger geleerde, toetsen; op gelijke wijze zal men kunnen te werk gaan voor functiën van een willekeurig aantal veranderlijken.

§ 158. Wij zullen de thans afgehandelde theorie besluiten met de korte aanwijzing eener algemeene en zeer vruchtbare leerwijze tot het onderzoek der maxima of minima bij functiën van een aantal veranderlijke elementen, die slechts gedeeltelijk van elkander onafhankelijk zijn.

Zij namelijk U eene functie van m veranderlijken $x, y, z, t \ldots$, die tevens aan elkander verbonden zijn door p vergelijkingen van den vorm

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0 \text{ enz.},$$

zoodat er een aantal van $m - p$ onafhankelijke veranderlijken overig blijven.

Deze vergelijkingen leveren de navolgende differentiaal-betrekkingen op, tusschen de m veranderlijken,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \text{enz.} &= 0, \\ \frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \text{enz.} &= 0, \\ \frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \text{enz.} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (A)$$

. . . .

Ter bepaling van het maximum of minimum moeten de partiële differentiaal-quotienten van U, ten opzigte van elke der onafhankelijke veranderlijken, gelijk nul gesteld worden. Om deze te bekomen zal men in de volledige waarde van dU de p differentialen der afhankelijke veranderlijken moeten elimineren met behulp der p voorgaande differentiaal-vergelijkingen (A), en hierna de coëfficienten der $m - p$ overige differentialen gelijk nul stellen.

Deze eliminatie kan nu verrigt worden door die vergelijkingen

respectievelijk te vermenigvuldigen met onbepaalde factoren λ, μ, ν..., de som dezer producten op te tellen bij de vergelijking

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz + \text{enz.} = 0,$$

en alsdan de coëfficienten van elk der m differentialen gelijk nul te stellen.

Eliminerende vervolgens de p ingevoerde factoren $\lambda, \mu, \nu \ldots$, zoo ontstaan hieruit $m - p$ vergelijkingen, welke, in vereeniging met het stelsel (A), voldoende zullen zijn ter bepaling der waarden van de m veranderlijken, welke de functie U tot een maximum of minimum maken.

De verdere beslissing hieromtrent zal met behulp der differentiaal-quotienten van de tweede orde, volgens de hiervoren verklaarde theorie behooren plaats te hebben.

Dit weinige zij echter genoegzaam, om zich met den geest eener handelwijze bekend te maken, die, vooral in de hoogere deelen der Mechanica, eene belangrijke toepassing vindt.

TWEE EN TWINTIGSTE LES.

Ontwikkeling van eenige ingewikkelde functiën, volgens de reeks van LAGRANGE.

§ 159. De reeks van MACLAURIN voor de ontwikkeling van functiën volgens de opklimmende magten van het veranderlijke element, en waarvan het nuttig gebruik ons reeds uit menigvuldige toepassingen gebleken is, maakt slechts een bijzonder geval uit eener meer algemeene reeks, welke van den beroemden LAGRANGE afkomstig is, en ten doel heeft de ontwikkeling eener functie y van de veranderlijke grootheid x, wanneer die functie gegeven is door eene vergelijking, begrepen in den algemeenen vorm

$$y = x + a\,f(y);$$

zijnde hierin $f(y)$ eene bekende functie van y. De reeks nu volgens welke y naar de opklimmende magten van a kan worden ontwikkeld, zal deze zijn

$$y = x + aX + \frac{a^2}{1.2}\frac{d(X^2)}{dx} + \frac{a^3}{2.3}\frac{d^2(X^3)}{dx^2} + \frac{a^4}{2.3.4}\frac{d^3(X^4)}{dx^3} \text{ enz. } . (1)$$

waarin $f(x)$ kortheidshalve door X aangewezen is.

Wij konden deze reeks niet onmiddelijk op die van MACLAURIN en TAYLOR laten volgen, vermits het betoog daarvan, gelijk thans blijken zal, gegrond is op de eigenschappen der partiële differentiaal-quotienten eener functie van twee veranderlijke elementen, welker theorie, naar de door ons aangenomen volgorde, eerst in de *XVIII*e *Les* behandeld is.

§ 160. Onderstellende dan dat y vatbaar zij om in eene convergerende reeks naar de opklimmende magten van a ontwikkeld te worden, hetgeen voor kleine waarden dezer grootheid altijd mogelijk is, zullen wij mogen schrijven

$$y = Y_0 + aY_1 + a^2Y_2 + a^3Y_3 + \ldots$$

waarin nu de coëfficiënten Y_0, Y_1, Y_2, functiën van x alleen aanduiden. Voor $a = 0$, wordt $y = x$, dus heeft men $Y_0 = x$. De factor Y_m, behoorende bij den $(m + 1)^{en}$ term, zal, ingevolge

de reeks van MACLAURIN, blijkbaar tot waarde hebben $\frac{1}{2.3..m}\cdot\frac{d^m y}{da^m}$, nadat hierin $a = 0$ zal gesteld zijn, x bij deze differentiatiën als standvastig aannemende. Het bepalen dezer factoren komt dus eeniglijk neder op het vinden eener algemeene uitdrukking voor Y_m in functie van x.

Differentiëren wij te dien einde de gegevene vergelijking

$$y = x + af(y),$$

afzonderlijk ten aanzien van elk der van elkander onafhankelijke elementen x en a, dan bekomen wij achtervolgens,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + af_1(y)\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dy}{da} = f(y) + af_1(y)\frac{dy}{da},$$

en hieruit $f_1(y)$ verdrijvende, ontstaat er de differentiaal-betrekking

$$\frac{dy}{da} = f(y)\frac{dy}{dx} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

waardoor de differentiatien ten opzigte van a, tot die ten opzigte van x worden teruggebragt, hetgeen een geschikt hulpmiddel oplevert om de waarden van Y_1, Y_2 enz. uit elkander af te leiden.

Daar Y_1 de waarde van $\frac{dy}{da}$ voor $a = 0$ voorstelt, en y alsdan in x overgaat, waardoor $\frac{dy}{dx} = 1$ wordt, zoo vinden wij terstond met behulp der vergelijking (2),

$$Y_1 = f(x) = X.$$

Om Y_2 te bekomen, differentiëren wij de laatst genoemde vergelijking wederom ten aanzien van a, en van x, dan komt er

$$\frac{d^2y}{da^2} = f(y)\frac{d^2y}{dadx} + f_1(y)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{da},$$

$$\frac{d^2y}{dadx} = f(y)\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(y)\frac{dy^2}{dx^2},$$

dus, na substitutie der waarden van $\frac{d^2y}{dadx}$ en $\frac{dy}{da}$, gaat de eerste dezer beide vergelijkingen over in

$$\frac{d^2y}{da^2} = f(y)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2f(y)f_1(y)\frac{dy^2}{dx^2},$$

en hierdoor is nu ook de tweede afgeleide functie van y ten opzigte a, uitgedrukt in die ten opzigte van x.

Wijders is het gemakkelijk in te zien, dat het tweede lid der zoo

even gevondene vergelijking juist het differentiaal-quotient van het product $(fy)^2 . \frac{dy}{dx}$ ten opzigte van x voorstelt.

Derhalve heeft men

$$\frac{d^2y}{da^2} = \frac{d.\left(f(y)^2 \frac{dy}{dx}\right)}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

en dus, door $a = 0$ te stellen

$$Y_2 = \frac{1}{2}\frac{d.f(x)^2}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d.(X^2)}{dx}.$$

Op gelijke wijze voortgaande, laat zich uit de vergel. (3) afleiden,

$$\frac{d^3y}{da^3} = \frac{d^2\left(f(y)^3 \frac{dy}{dx}\right)}{dx^2},$$

en alzoo

$$Y_3 = \frac{1}{2.3} \cdot \frac{d^2(X^3)}{dx^2}.$$

Om echter in geene herhaalde herleidingen te vervallen, zullen wij thans betoogen, dat men in het algemeen heeft,

$$Y_m = \frac{1}{2.3..m} \frac{d^{m-1}(X^m)}{dx^{m-1}}.$$

Differentiëren wij namelijk het product $\varphi(y)\frac{dy}{dx}$ ten opzigte van a, dan hebben wij

$$\frac{d.\left(\varphi(y)\frac{dy}{dx}\right)}{da} = \varphi(y)\frac{d^2y}{dxda} + \varphi_1(y)\frac{dy}{dx}\frac{dy}{da},$$

waarin $\varphi(y)$ eene geheel willekeurige functie van y beteekent. Schrijvende nu voor $\frac{d^2y}{dxda}$ en $\frac{dy}{da}$, de hiervoren gevonden waarden, komt er

$$\frac{d.\left(\varphi(y)\frac{dy}{dx}\right)}{da} = \varphi(y)f(y)\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(y)f_1(y)\frac{dy^2}{dx^2} + \varphi_1(y)f(y)\frac{dy^2}{dx^2},$$

welke uitdrukking juist aanwijst het differentiaal-quotient ten aanzien van x, van het product

$$\varphi(y)f(y)\frac{dy}{dx},$$

zoodat men heeft

$$\frac{d.\left(\varphi(y)\frac{dy}{dx}\right)}{da}=\frac{d.\left(\varphi(y)f(y)\frac{dy}{dx}\right)}{dx}.$$

Stellen wij thans $\varphi(y)=f(y)^n$, dan volgt hieruit de algemeene formule

$$\frac{d.\left((fy)^n\frac{dy}{dx}\right)}{da}=\frac{d.\left((fy)^{n+1}\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\quad\ldots\ldots(4)$$

Hiervoren is reeds gevonden

$$\frac{d^2y}{da^2}=\frac{d.\left((fy)^2\frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

dus geven de achtervolgende differentiatien ten aanzien van a, met behulp van (4)

$$\frac{d^3y}{da^3}=\frac{d^2\left((fy)^2\frac{dy}{dx}\right)}{dx\,da}=\frac{d.\left[\frac{d(f(y)^3\frac{dy}{dx})}{dx}\right]}{dx}=\frac{d^2\left((fy)^3\frac{dy}{dx}\right)}{dx^2},$$

$$\frac{d^4y}{da^4}=\frac{d^3\left(f(y)^3\frac{dy}{dx}\right)}{da\,dx^2}=\frac{d^3\left(f(y)^4\frac{dy}{dx}\right)}{dx^3},$$

en dus in het algemeen,

$$\frac{d^my}{da^m}=\frac{d^{m-1}\left((fy)^m\frac{dy}{dx}\right)}{dx^{m-1}},$$

welke formule, voor $a=0$, zal geven

$$Y_m=\frac{1}{2.3..m}\frac{d^{m-1}(fx)^m}{dx^{m-1}},$$

of

$$Y_m=\frac{1}{2.3..m}\frac{d^{m-1}(X^m)}{dx^{m-1}}.$$

Men verkrijgt alzoo voor de gezochte reeks,

$$y=x+aX+\frac{a^2}{1.2}\frac{d(X^2)}{dx}+\frac{a^3}{2.3}\frac{d^2(X^3)}{dx^2}+\;\ldots\quad(A)$$

welke, bij de toepassing op bepaalde functien, nogtans de ontwikkeling vordert van de achtervolgende differentiaal quotienten der magten van X.

Voor zeer kleine waarden van a, zoodat de tweede en hoogere magten dezer grootheid mogen verwaarloosd worden, heeft men

$$y = x + a f(x),$$

zoo als zulks uit de oorspronkelijke vergelijking

$$y = x + a f(y),$$

gemakkelijk af te leiden was.

In het bijzonder geval van $a = 1$, verandert de reeks (A) in

$$y = x + X + \frac{1}{1.2}\frac{d(X^2)}{dx} + \frac{1}{2.3}\frac{d^2(X^3)}{dx^2} + \text{enz.} \quad . \quad . \quad . \text{(B)}$$

§ 161. Men kan zich tevens de meer algemeene vraag voorstellen, om uit de verg. $y = x + a f(y)$, in plaats van y, eene willekeurige functie $F(y)$ af te leiden, welke insgelijks naar de opklimmende magten van a ontwikkeld zij.

Nu is volgens de reeks van Maclaurin,

$$F(y) = F(x) + \left(\frac{dF}{da}\right).a + \left(\frac{d^2F}{da^2}\right).\frac{a^2}{1.2} + \left(\frac{d^3F}{da^3}\right).\frac{a^3}{2.3} + \text{enz.},$$

waarin $\left(\frac{d^nF}{da^n}\right)$ de waarde der afgeleide functie $\frac{d^nF(y)}{da^n}$ voor $a = 0$ beteekent.

Uit de vergelijking

$$\frac{dF(y)}{da} = F_1(y)\frac{dy}{da} = F_1(y)f(y)\frac{dy}{dx},$$

volgt wederom, door achtervolgende differentiatien ten opzigte van a, en met behulp der algemeene betrekking (4), welke voor

$$\varphi(y) = F_1(y)f(y),$$

geeft

$$\frac{d.\left[(F_1(y)f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{da} = \frac{d.\left[(F_1(y)f(y))^2\frac{dy}{dx}\right]}{dx},$$

$$\frac{d^2F(y)}{da^2} = \frac{d.\left[(F_1(y)(fy))^2\frac{dy}{dx}\right]}{dx},$$

$$\frac{d^3F(y)}{da^3} = \frac{d^2\left[(F_1(y)(fy))^3\frac{dy}{dx}\right]}{dx^2},$$

en in het algemeen

$$\frac{d^m F(y)}{da^m} = \frac{d^{m-1}\left[F_1(y)\, f(y)^m \frac{dy}{dx}\right]}{dx^{m-1}}.$$

Stelt men hierin $a = 0$, dan komt er

$$\left(\frac{d^m F(y)}{da^m}\right) = \frac{d^{m-1}[(F_1(x) f(x))^m]}{dx^{m-1}},$$

en men verkrijgt alzoo, kortheidshalve $\partial^n \varphi(x)$ voor $\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}$ schrijvende, de ontwikkeling

$$F(y) = F(x) + a F_1(x) f(x) + \frac{a^2}{2}\partial[F_1(x) f(x)^2] + \frac{a^3}{2.3}\partial^2[F_1(x) f(x)^3] + \text{enz.} \quad (C)$$

welke, voor $a = 1$, overgaat in

$$F(y) = F(x) + F_1(x) f(x) + \frac{1}{2}\partial[F_1(x) f(x)^2] + \frac{1}{2.3}\partial^2[F_1(x) f(x)^3] + \text{enz.} \quad (D)$$

Deze laatste reeks is meer bepaaldelijk bekend onder de benaming van reeks of theorema van LA GRANGE. De meer algemeene (C) laat zich echter onmiddelijk daaruit afleiden, indien men slechts $f(x)$ door $a f(x)$ vervangt. (*)

Stelt men in de reeksen (A) en (D), $x = 0$, dan kunnen zij dienen, om uit de vergelijking

$$y = a f(y),$$

hetzij de waarde van y, of wel eene bepaalde functie van y, regtstreeks in a uittedrukken.

§ 162. Menigvuldig zijn de toepassingen, welke men van deze hoogst gewigtige reeksen op onderscheidene analytische onderzoekingen kan maken, waartoe inzonderheid mogen gerekend worden, de algemeene ontwikkeling van de wortels der hoogere magts-

(*) LA GRANGE heeft deze reeks voor het eerst bekend gemaakt in eene belangrijke verhandeling, getiteld: *Nouvelle méthode pour la résolution des équations littérales par le moyen des séries*, te vinden in de *Mémoires de l'académie de Berlin*, voor den jare 1768. Het aldaar gegeven betoog, hetwelk op eene soort van inductie gegrond is, heeft later, bij eenige voorname wiskundigen, bedenkingen doen ontstaan, die andere meer regtstreeksche bewijzen uitgelokt hebben, waarvan het door ons medegedeelde tot de minst zamengestelde behoort. Dezelfde reeks is vervolgens door LA PLACE onder eenen meer algemeenen vorm voorgedragen, en tevens op functiën van verscheidene veranderlijke elementen uitgebreid geworden. Ook CAUCHY heeft in het VIIIe deel der *Mémoires* van de Parijsche Akademie (1829), een' belangrijken arbeid over hetzelfde onderwerp geleverd, waarin tevens de waarde van de rest der reeks onder een' eindigen vorm wordt voorgesteld.

vergelijkingen in functiën van derzelver coëfficienten; de omkeering der reeksen, en de oplossing van vele transcendentale vergelijkingen. Ten einde het bestek van dit leerboek niet te overschrijden, moeten wij ons hier bij eenige weinige toepassingen bepalen, die evenwel voldoende zullen zijn om de belangrijkheid der gemelde reeksen ten sterkste te doen uitkomen.

Wij kiezen daartoe in de eerste plaats de ontwikkeling in reeksen van de magten der wortels van de tweede en derde magtsvergelijkingen in functiën van hare coëfficienten.

1°. Zij de vergelijking

$$a - by + cy^2 = 0.$$

Na dezelve door b gedeeld, en vervolgens vergeleken te hebben met de vergelijking

$$x - y + f(y) = 0,$$

waarop de reeksen (B) en (D) van toepassing zijn, heeft men

$$x = \frac{a}{b}, \qquad X = f(x) = \frac{cx^2}{b}.$$

Om nu onmiddelijk eene reeks voor de waarde van y^m te bekomen, stelle men in (D)

$$F(x) = x^m, \quad \text{dus} \quad F_1(x) = mx^{m-1}.$$

$$F_1(x)\, f(x) = \frac{mc}{b}\, x^{m+1},$$

$$\partial.\left(F_1(x)\, f(x)^2\right) = \partial.\left(\frac{mc^2}{b^2}\, x^{m+3}\right) = \frac{m(m+3)\,c^2}{b^2}\, x^{m+2},$$

$$\partial^2.\left(F_1(x)\, f(x)^3\right) = \partial^2.\left(\frac{mc^3}{b^3}\, x^{m+5}\right) = \frac{m\,(m+4)\,(m+5)\,c^3}{b^3}\, x^{m+3},$$

en op deze wijze voortgaande, vindt men, na substitutie der waarde van x, de reeks

$$y^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m + \frac{mc}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{m+1} + \frac{m(m+3)\,c^2}{1.2\;\;b^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{m+2} + \frac{m(m+4)\,(m+5)\,c^3}{1.2.3\;\;b^3}\left(\frac{a}{b}\right)^{m+3}$$
$$+ \frac{m(m+5)\,(m+6)\,(m+7)\,c^4}{1.2.3.4\;\;b^4}\left(\frac{a}{b}\right)^{m+4} + \text{enz.} \quad . \quad (1)$$

waarvan de wet van voortgang duidelijk in het oog loopt.

Voor $m = 1$, gaat de gevondene reeks over in

$$y = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4\,a^3c^2}{2\,b^5} + \frac{5.6}{2.3}\frac{a^4c^3}{b^7} + \frac{6.7.8}{2.3.4}\frac{a^5c^4}{b^9} + \text{enz.} \quad . \quad (2)$$

welke ontwikkeling ook regtstreeks uit (B) had kunnen worden afgeleid.

De naauwkeurigheid dezer laatste reeks laat zich spoedig bevestigen, door het ontwikkelen der wortels van de vergelijking

$$a - by + cy^2 = 0,$$

in oneindige reeksen, volgens de gewone oplossings-wijze. Men heeft namelijk

$$y = \frac{b}{2c}\left\{1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{4ac}{b^2}\right)}\right\}.$$

Het benedenste teeken gebruikende, vindt men, na ontwikkeling der wortel-uitdrukking,

$$y = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4\,a^3c^2}{2\,b^5} + \frac{6.5}{2.3}\frac{a^4c^3}{b^7} + \text{enz.}$$

Het bovenste teeken geeft

$$y = \frac{b}{c} - \frac{a}{b} - \frac{a^2c}{b^3} - \frac{4\,a^3c^2}{2\,b^5} - \text{enz.}$$

van welke beide reeksen, de eerste met (2) volkomen overeenstemt.

Het theorema van La Grange schijnt in den eersten opslag slechts éèn' enkelen wortel der hoogere magts-vergelijkingen te kunnen opleveren, en wel bepaaldelijk dien wortel, welke tegelijk met den eersten of bekenden term a nul wordt. Ware zulks werkelijk het geval, zijne toepassingen zouden hierdoor zeer beperkt worden. De genoemde wiskundige heeft echter aangetoond, dat men, door eene omzetting der termen van de gegevene vergelijking, altijd in staat is, al hare wortels in reeksen te ontwikkelen, zoo als thans ten aanzien der hier behandelde tweede magts-vergelijking nader zal kunnen blijken. Men schrijve haar namelijk onder dezen vorm,

$$by - cy^2 - a = 0,$$

en deele vervolgens elken term door cy, dan komt er

$$\frac{b}{c} - y - \frac{a}{cy} = 0.$$

Men heeft dus hier

$$x = \frac{b}{c}. \qquad f(x) = -\frac{a}{cx}.$$

$$F_1(x)\,f(x) = -\,mx^{m-1} \times \frac{a}{cx} = -\frac{a}{c}\,mx^{m-2},$$

$$\partial.\left(F_1(x)f(x)^2\right) = \partial.\left(\frac{ma^2}{c^2}x^{m-3}\right) = m.(m-3)\frac{a^2}{c^2}x^{m-4},$$

$$\partial^2.\left(F_1(x)f(x)^3\right) = -\partial^2.\left(\frac{ma^3}{c^3}x^{m-4}\right) = -m.(m-4)(m-5)\frac{a^3}{c^3}x^{m-6}.$$

Zoo voortgaande vindt men voor de tweede waarde van y^m,

$$y^m = \left(\frac{b}{c}\right)^m - m\frac{a}{c}\left(\frac{b}{c}\right)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}\frac{a^2}{c^2}\left(\frac{b}{c}\right)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}\frac{a^3}{c^3}\left(\frac{b}{c}\right)^{m-6}$$
$$+ \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}\frac{a^4}{c^4}\left(\frac{b}{c}\right)^{m-8} - \text{enz.} \quad . \quad (3)$$

en dus voor den tweeden wortel

$$y = \frac{b}{c} - \frac{a}{b} - \frac{a^2c}{b^3} - 2\frac{a^3c^2}{b^5} - \frac{5.6}{2.3}\frac{a^4c^3}{b^7} - \text{enz.}, \quad . \quad . \quad (4)$$

welke reeks, gelijk men reeds hiervoren gezien heeft, de ontwikkeling van den wortel

$$\frac{b}{2c}\left\{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{4ac}{b^2}\right)}\right\}$$

voorstelt.

Het behoeft naauwelijks hier opgemerkt te worden, dat de reeksen (1) (2) (3) (4) alleen dan de waarden van y^m en y doen kennen, ingeval zij convergent zijn. De divergentie is het gevolg van de onbestaanbaarheid der wortels, omdat, $4ac$ alsdan $> b^2$ zijnde, de wortel-uitdrukking $\sqrt{\left(1 - \frac{4ac}{b^2}\right)}$ zich in geene convergerende reeks laat ontwikkelen.

Daar een der wortels van de vergelijking

$$a - by + cy^2 = 0,$$

tegelijk met a verdwijnt, en de andere hierdoor gelijk aan $\frac{b}{c}$ wordt, zoo behooren de reeksen (2) en (4) mede aan die voorwaarde te voldoen, hetgeen ook werkelijk het geval is.

2°. Zij de vergelijking

$$a - by + cy^2 - dy^3 = 0,$$

of

$$\frac{a}{b} - y + \frac{cy^2 - dy^3}{b} = 0,$$

dan heeft men, op grond der vergelijking

$$x - y + f(y) = 0,$$

$$x = \frac{a}{b}, \quad f(x) = \frac{cx^2 - dx^3}{b},$$

en hieruit zal men, met behulp der reeks (B), na de vereischte differentiatiën en substitutiën verrigt te hebben, voor een' der wortels bekomen

$$y=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{2c^2}{b^2}-\frac{d}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{5c^3}{b^3}-\frac{5cd}{b^2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^4$$

$$+\left(\frac{14c^4}{b^4}-\frac{21c^2d}{b^3}+\frac{3d^2}{b^2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^5+\left(\frac{42c^5}{b^5}-\frac{84c^3d}{b^4}+\frac{28cd^2}{b^3}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^6+\text{enz.}$$

Om nu de beide overige wortels insgelijks in reeksen uit te drukken, moet men, volgens de aanwijzing van La Grange, twee andere op elkander volgende termen der vergelijking, naar voren brengen, en dus achtervolgens schrijven,

$$by-cy^2+dy^3-a=0,$$

en

$$cy^2-dy^3+a-by=0.$$

Uit de eerste volgt

$$\frac{b}{c}-y+\frac{dy^3-a}{cy}=0,$$

dus

$$x=\frac{b}{c}.\qquad f(x)=\frac{dx^3-a}{cx},$$

en uit de tweede

$$\frac{c}{d}-y+\frac{a-by}{dy^2}=0,$$

dus

$$x=\frac{c}{d},\qquad f(x)=\frac{a-bx}{dx^2}.$$

Door nu op deze twee verschillende waarden van x en $f(x)$, de formule (B) van toepassing te maken, verkrijgt men twee reeksen, die de waarden der beide overige wortels zullen opleveren. Wij onthouden ons die reeksen hier te laten volgen, dewijl zij, wegens het zamengestelde van hare termen, voor het berekenen van de getallen-waarden der wortels minder geschikt zijn dan eene der bekende benaderings-leerwijzen, en dus slechts uit een analytisch oogpunt beschouwd, eenige waarde bezitten.

De weg hiervoren aangewezen zal thans voldoende zijn, om zich te overtuigen, dat men van hetzelfde hulpmiddel steeds gebruik kan maken om al de wortels eener hoogere magts-vergelijking, zoo mede hunne magten of andere functien derzelven, in van elkander verschillende reeksen te ontwikkelen.

3°. Tot voorbeeld strekke nog de n^e magts-vergelijking

$$a - by + cy^n = 0,$$

of

$$\frac{a}{b} - y + \frac{c}{b}y^n = 0,$$

dus

$$x = \frac{a}{b}, \quad f(x) = \frac{c}{b}x^n.$$

Het is niet moeijelijk daaruit, met behulp der formule (B), de navolgende reeks voor y^m af te leiden,

$$y^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \left\{1 + \frac{m\,ca^{n-1}}{b^n} + \frac{m(m + 2n - 1)}{2}\frac{c^2a^{2n-2}}{b^{2n}} + \frac{m(m + 3n - 1)(m + 3n - 2)}{2.3}\frac{c^3a^{3n-3}}{b^{3n}} + \text{enz.}\right\}$$

welke wederom, zoo als het behoort, voor $n = 2$, de reeks (I) te voorschijn brengt.

Om den wortel y te bekomen, heeft men, $m = 1$ stellende,

$$y = \frac{a}{b} + \frac{a^nc}{b^{n+1}} + \frac{na^{2n-1}c^2}{b^{2n+1}} + \frac{n(3n - 1)\,a^{3n-2}c^3}{2\,b^{3n+1}} + \frac{n(4n - 1)(4n - 2)\,a^{4n-3}c^4}{2.3.b^{4n+1}} + \text{enz.}$$

Ofschoon nu de onvolledigheid der gekozene vergelijking den weg schijnt af te snijden, om hare verschillende wortels in reeksen te ontwikkelen, heeft La Grange echter de hulpmiddelen aangewezen, welke in zoodanige omstandigheid geschikt zijn om die wortels te doen kennen. Wij kunnen, om in geene te groote wijdloopigheid te vervallen, bij dat belangrijke onderwerp niet langer stilstaan, en evenmin de kenmerken onderzoeken, welke omtrent de convergentie der reeksen moeten uitspraak doen, en waarmede de bestaanbaarheid der wortels in naauw verband staat. Den lezer, die omtrent de toepassing van het theorema van La Grange, op de ontwikkeling der wortels van de hoogere magts-vergelijkingen meerdere bijzonderheden verlangt te weten, zij de studie van het hiervoren (bladz. 273) aangehaalde geschrift van dien beroemden wiskundige ten sterkste aanbevolen (*).

(*) Onze aankomende wiskundigen, wien de gelegenheid ontbreken mogt van den oorspronkelijken arbeid van La Grange kennis te nemen, kunnen hieromtrent met vrucht raadplegen J. de Gelder's *Beginselen der Differentiaal-inte-*

§ 163. Gaan wij thans tot de transcendentale vergelijkingen over. De oplossing van het vraagstuk, in de sterrekunde bekend onder den naam van *problema* van Kepler, en strekkende om bij de beweging van eenig hemelligchaam om de zon, zoowel de uitmiddelpuntige en de ware anomalie, als den voerstraal of den afstand tot de zon, in functie der middelbare anomalie uit te drukken; leidt tot de navolgende betrekkingen tusschen deze vier grootheden en de afmetingen van den elliptischen loopkring (*).

$$u = \varphi + e \sin. u \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

$$r = a(1 - e \cos. u) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\beta)$$

$$tg \frac{1}{2} \vartheta = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1+e}\right)} tg \frac{1}{2} u \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\gamma)$$

waarin a voorstelt de halve as of lijn der absiden, e de verhouding tusschen de excentriciteit en die halve as, r den voerstraal, φ de middelbare, u de uitmiddelpuntige, en ϑ de ware anomalie.

De berekening van den hoek u in functie van de ware anomalie φ, die evenredig aan den verloopen tijd is, was, vóór het bekend worden van het theorema van La Grange, het moeijelijkste gedeelte der oplossing van het problema van Kepler, en kon eeniglijk langs den weg van benadering, door middel van achtervolgende substitutiën, ten uitvoer gebragt worden. Thans echter is men in staat de waarde van u, regtstreeks uit de vergel. (α), in functie van φ uit te drukken, volgens eene reeks, naar de opklimmende magten van het getal e geordend. Te dien einde stelle men in de algemeene vergelijking

$$y = x + a\, f(y),$$

$$y = u, \quad x = \varphi, \quad a = e, \quad \text{en} \quad f(y) = \sin. u.$$

De reeks (A) geeft hier ter bepaling van u,

$$u = \varphi + e \sin. \varphi + \frac{e^2}{2} \partial . \sin.^2 \varphi + \frac{e^3}{2.3} \partial^2 . \sin.^3 \varphi + \text{enz.}$$

---

graal- en variatie-rekening, IIde deel, pag. 297 et seq., alwaar het onderwerp insgelijks met groote uitvoerigheid behandeld is. Dat deel is eerst voor eenige maanden, na den dood des schrijvers, in het licht verschenen door de zorg van den Hoogleeraar Verdam, die hetzelve met eene belangrijke bijdrage *Over het interpolen van reeksen* verrijkt heeft.

(*) Voor het betoog daarvan moeten wij den lezer naar de leerboeken over de sterrekunde verwijzen.

Om de hier aangewezen differentiatiën het gemakkelijkst uitte-voeren, zullen wij de magten der sinussen, door de sinussen en cosinussen van de veelvouden des boogs uitdrukken. Volgens de bekende goniometrische formules, heeft men

$$2\,sin.^2\varphi = -\,cos.\,2\varphi + 1,$$

$$2^2 sin.^3\varphi = -\,sin.3\varphi + 3\,sin.\varphi,$$

$$2^3 sin.^4\varphi = cos.\,4\varphi - 4\,cos.\,2\varphi + 3,$$

$$2^4 sin.^5\varphi = sin.5\varphi - 5\,sin.3\varphi + 10\,sin.\varphi,$$

$$2^5 sin.^6\varphi = -\,cos.6\varphi + 6\,cos.\,4\varphi - 15\,cos.\,2\varphi + 10,$$

$$2^6 sin.^7\varphi = -\,sin.\,7\varphi + 7\,sin.\,5\varphi - 21\,sin.\,3\varphi + 35\,sin.\varphi,$$

enz. enz.

Derhalve

$$\partial.\,sin.^2\varphi = sin.\,2\varphi,$$

$$\partial^2.sin.^3\varphi = \frac{3^2 sin.\,3\varphi - 3\,sin.\varphi}{2^2},$$

$$\partial^3.sin.^4\varphi = 2^3 sin.\,4\varphi - 4\,sin.\,2\varphi,$$

$$\partial^4.\,sin.^5\varphi = \frac{5^4\,sin.\,5\varphi - 5.\,3^4\,sin.\,3\varphi + 10\,sin.\varphi}{2^4},$$

$$\partial^5.\,sin.^6\varphi = 3^5\,sin.\,6\varphi - 6.\,2^5\,sin.\,4\varphi + 15\,sin.\,2\varphi,$$

$$\partial^6.sin.^7\varphi = \frac{7^6\,sin.\,7\varphi - 7.\,5^6\,sin.\,5\varphi + 21.\,3^6\,sin.\,3\varphi - 35\,sin.\varphi}{2^6},$$

enz. enz.

waardoor men voor u de navolgende reeks bekomt,

$$u = \varphi + e\,sin.\varphi + \frac{e^2}{2}\,sin.\,2\varphi + \frac{e^3}{2^3}(3\,sin.\,3\varphi - sin.\varphi)$$

$$+ \frac{e^4}{2.3}(2\,sin.\,4\varphi - sin.\,2\varphi) + \frac{e^5}{2^7.3}(5^3\,sin.\,5\varphi - 3^4\,sin.\,3\varphi + 2\,sin.\varphi)$$

$$+ \frac{e^6}{2^4.3.5}(3^4\,sin.\,6\varphi - 2^6\,sin.\,4\varphi + 5\,sin.\,2\varphi)$$

$$+ \frac{e^7}{2^{10}.\,3^2.5}(7^5\,sin.\,7\varphi - 5^6\,sin.\,5\varphi + 3^7\,sin.\,3\varphi - 5\,sin.\varphi) + \text{enz.} \quad (a')$$

welke men, des verkiezende, insgelijks naar de sinussen der veel-vouden van φ kan rangschikken. Daar de verhouding e bij de meeste hemelligchamen eene geringe waarde heeft, zal men de voorgaande reeks tot geene hoogere magten van e behoeven uit te strekken.

De hoek u thans gevonden zijnde, zoude men hieruit de waarde van r en ϑ met behulp der vergelijkingen (β) (γ) kunnen berekenen. Verlangt men echter elke dezer waarden ook regtstreeks in φ en e uit te drukken, dan kan zulks, door toepassing van het theorema van LA GRANGE, aldus geschieden:

Men stelle $\frac{r}{a} = 1 - e\cos.u = F(u)$, en wederom als voren

$$y = u, \quad x = \varphi, \quad a = e, \quad f(y) = \sin.u,$$

dus $f(x) = \sin.\varphi, \quad F(x) = 1 - e\cos.\varphi, \quad F_1(x) = e\sin.\varphi.$

dan geeft de reeks (C)

$$F(u) = 1 - e\cos.u = \frac{r}{a} = 1 - e\cos.\varphi + e^2\sin.^2\varphi + \frac{e^3}{2}\partial.\sin.^3\varphi$$
$$+ \frac{e^4}{2.3}\partial^2.\sin.^4\varphi + \frac{e^5}{2.3.4}\partial^3.\sin.^5\varphi + \text{enz.}$$

Nu is

$$\sin.^2\varphi = \frac{-\cos.2\varphi + 1}{2}$$

$$\partial.\sin.^3\varphi = \frac{-3\cos.3\varphi + 3\cos.\varphi}{2^2},$$

$$\partial^2.\sin.^4\varphi = -2\cos.4\varphi + 2\cos.2\varphi,$$

$$\partial^3.\sin.^5\varphi = \frac{-5^3\cos.5\varphi + 5.3^3\cos.3\varphi - 5.2\cos.\varphi}{2^4},$$

$$\partial^4.\sin.^6\varphi = \frac{-3^4\cos.6\varphi + 6.2^4\cos.4\varphi - 3.5\cos.2\varphi}{2},$$

enz. enz.

Na substitutie dezer differentiaal-verhoudingen, komt er alzoo ter berekening van r, de reeks

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos.\varphi - \frac{e^2}{2}(\cos.2\varphi - 1) - \frac{e^3}{2^3}(3\cos.3\varphi - 3\cos.\varphi)$$
$$- \frac{e^4}{3}(\cos.4\varphi - \cos.2\varphi) - \frac{e^5}{3.2^7}(5^3\cos.5\varphi - 5.3^3\cos.3\varphi - 5.2\cos.\varphi)$$
$$- \frac{e^6}{2^4.5}(3^3\cos.6\varphi - 2^5\cos.4\varphi + 5\cos.2\varphi) - \text{enz.}$$

Om de waarde van ϑ insgelijks in eene reeks volgens de sinussen en cosinussen van den boog φ te ontwikkelen, zullen wij vooraf de vergelijking

$$tg.\tfrac{1}{2}\vartheta = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}\,tg.\tfrac{1}{2}u,$$

in dier voege vervormen, dat de boog ϑ in eene reeks volgens de sinussen van den boog u en zijne veelvouden kan uitgedrukt worden. Stellende kortheidshalve

$$\frac{\sqrt{(1+e)}-\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}+\sqrt{(1-e)}}=\frac{e}{1+\sqrt{(1-e^2)}}=e',$$

zoo hebben wij

$$tg.\frac{1}{2}(\vartheta-u)=\frac{(\sqrt{(1+e)}-\sqrt{(1-e)})tg.\frac{1}{2}u}{\sqrt{(1+e)}+\sqrt{(1-e)}\,tg.^2\frac{1}{2}u}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(\sqrt{(1+e)}-\sqrt{(1-e)})sin.u}{\sqrt{(1+e)}\,cos.^2\frac{1}{2}u+\sqrt{(1-e)}sin.^2\frac{1}{2}u}=\frac{e'sin.u}{1-e'\,cos.u},$$

waaruit volgt (*)

$$\vartheta-u=2\,B.tg.\ \frac{e'\,sin.u}{1-e'\,cos.u}$$

$$=2\left\{e'sin.u+\frac{e'^2}{2}sin.2u+\frac{e'^3}{3}sin.3u+\frac{e'^4}{4}sin.4u+\text{enz.}\right\}\ ..\ (\beta')$$

Er blijft thans nog overig de sinussen in deze reeks voorkomende, volgens die der veelvouden van den boog φ te ontwikkelen.

Nu geeft de grond-vergelijking

$$u=\varphi+e\,sin.u,$$

met behulp der reeks (α'),

$$sin.u=\frac{u-\varphi}{e}=sin.\varphi+\frac{e}{2}sin.2\varphi+\frac{e^2}{2^3}(3\,sin.3\varphi-sin.\varphi)$$

$$+\frac{e^3}{2.3}(2\,sin.4\varphi-sin.2\varphi)+\text{enz.}$$

Door wijders $F(u)=sin.nu$ en dus $F_1(u)=n\,cos.nu$ te stellen, vindt men, ingevolge de algemeene formule (C)

$$sin.nu=sin.n\varphi+ne\,cos.n\varphi\,sin.\varphi+\frac{ne^2}{2}\partial.(cos.n\varphi\,sin.^2\varphi)$$

$$+\frac{ne^3}{2.3}\partial^2(cos.n\varphi\,sin.^3\varphi)+\frac{ne^4}{2.3.4}\partial^3(cos.n\varphi\,sin.^4\varphi)+\text{enz.}$$

Maar, men heeft

$$cos.n\varphi\,sin.\varphi=\frac{sin.(n+1)\varphi-sin.(n-1)\varphi}{2},$$

(*) Zie het betoog dezer reeks in onze *Lessen over de Hoogere Algebra* § 263.

$$\cos. n\varphi \sin.^2\varphi = \cos. n\varphi \frac{(1-\cos. 2\varphi)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cos. n\varphi - \frac{1}{4}\left(\cos. (n+2)\varphi + \cos. (n-2)\varphi\right),$$

$$\cos. n\varphi \sin.^3\varphi = \cos. n\varphi \left\{ \frac{3 \sin.\varphi - \sin. 3\varphi}{2^2} \right\}$$

$$= \frac{3 \sin. (n+1)\varphi - 3 \sin. (n-1)\varphi - \sin. (n+3)\varphi + \sin. (n-3)\varphi}{2^3},$$

$$\cos. n\varphi \sin^4\varphi = \cos. n\varphi \left\{ \frac{\cos. 4\varphi - 4\cos. 2\varphi + 3}{2^3} \right\}$$

$$= \frac{\cos.(n+4)\varphi + \cos.(n-4)\varphi - 4\cos.(n+2)\varphi - 4\cos.(n-2)\varphi + 2.3\cos. n\varphi}{2^4},$$

$$\cos. n\varphi \sin.^5\varphi = \cos. \varphi n \left\{ \frac{\sin. 5\varphi - 5 \sin. 3\varphi + 10 \sin.\varphi}{2^4} \right\}$$

$$= \frac{\sin.(n+5)\varphi - \sin.(n-5)\varphi - 5\sin.(n+3)\varphi + 5\sin.(n-3\varphi) + 10\sin.(n+1)\varphi - 10\sin.(n-1)\varphi}{2^5},$$

enz. enz.

Hieruit volgt voor de waarden der differentiaal verhoudingen,

$$\partial.(\cos. n\varphi \sin.^2\varphi) = -\frac{n}{2}\sin. n\varphi + \left(\frac{n+2}{4}\right)\sin.(n+2)\varphi + \left(\frac{n-2}{4}\right)\sin.(n-2\varphi).$$

$$\partial^2(\cos. n\varphi \sin.^3\varphi) =$$

$$\frac{-3(n+1)^2\sin.(n+1)\varphi + 3(n-1)^2\sin.(n-1)\varphi + (n+3)^2\sin.(n+3)\varphi - (n-3)^2\sin.(n-3)\varphi}{2^3},$$

$$\partial^3(\cos. n\varphi \sin.^4\varphi) = \frac{1}{2^4}\Big\{(n+4)^3 \sin. (n+4)\varphi + (n-4)^3 \sin.(n-4)\varphi$$
$$- 4(n+2)^3 \sin(n+2)\varphi - 4(n-2)^3 \sin.(n-2)\varphi + 2.3n^3 \sin. n\varphi \quad ,$$

$$\partial^4(\cos. n\varphi \sin.^5\varphi)$$
$$= \frac{1}{2^5}\Big\{(n+5)^4 \sin.(n+5)\varphi - (n-5)^4 \sin.(n-5)\varphi - 5(n+3)^4 \sin.(n+3)\varphi$$
$$+ 5(n-3)^4\sin.(n-3)\varphi + 10(n+1)^4\sin.(n-1)\varphi - 10(n-1)^4\sin.(n-1)\varphi\Big\};$$

enz. enz.

Na deze substitutien zal men achtervolgens bekomen,

$$in.2u = \sin.2\varphi + e(\sin.3\varphi - \sin.\varphi) + e^2(\sin.4\varphi - \sin.2\varphi) + \frac{e^3}{2^3.3}(25\sin.5\varphi - 27\sin.3\varphi + 4\sin.\varphi)$$
$$+ \frac{e^4}{2^3.3}(3^3 \sin.6\varphi - 2^5 \sin.4\varphi + 7\sin.2\varphi) + \text{enz.}$$

$$\sin.3u = \sin.3\varphi + \frac{3e}{2}(\sin.4\varphi - \sin.2\varphi) + \frac{3e^2}{2^3}(5\sin.5\varphi - 6\sin.3\varphi + \sin.\varphi)$$

$$+ \frac{3e^3}{4}(3\sin.6\varphi - 4\sin.4\varphi + \sin.2\varphi) + \frac{e^4}{2^7}(7^3\sin.7\varphi - 4.5^3\sin.5\varphi$$

$$+ 2.3^4\sin.3\varphi - 3\sin.\varphi),$$

enz. enz.

Op gelijke wijze laten zich de waarden van $\sin.4u$, $\sin.5u$ enz. in functien van φ ontwikkelen, welke men vervolgens nog in de reeks (β') zal moeten substitueren. Daar echter deze laatste vooraf volgens de opklimmende magten van e behoort geordend te worden, zal het noodig zijn, dat wij ook de waarden van e'^2, e'^3, e'^4, in functien van die magten uitdrukken. Hierbij kan men van het theorema van La Grange zelve met vrucht gebruik maken, zoo als thans blijken zal. De vergelijking

$$\frac{e}{1+\sqrt{(1-e^2)}} = e'$$

geeft namelijk in het algemeen

$$e'^m = e^m\left(1+\sqrt{(1-e^2)}\right)^{-m}.$$

Men stelle

$$1+\sqrt{(1-e^2)} = y,$$

dan volgt hieruit

$$1-\sqrt{(1-e^2)} = \frac{e^2}{y},$$

dus

$$y = 2 - \frac{e^2}{y}.$$

Om de waarde van y^{-m} te bekomen, heeft men in de vergelijking

$$y = x + af(y),$$

$$F(y) = y^{-m}, \quad x = 2, \quad a = -e^2, \quad f(y) = \frac{1}{y} \text{ te stellen.}$$

De reeks (C) hier toepassende, verkrijgt men

$$y^{-m} = x^{-m} + me^2\,x^{-m-2} - \frac{me^4}{1.2}\partial.x^{-m-3} + \frac{me^6}{2.3}\partial^2.x^{-m-4} \text{ enz.}$$

welke, voor $x = 2$, geeft

$$y^{-m} = \frac{1}{2^m} + \frac{me^2}{2^{m+2}} + \frac{m.m+3}{2.2^{m+4}}e^4 + \frac{m(m+4)(m+5)}{2.3.2^{m+6}}e^6 + \text{enz.}$$

dus

$$=e^m y^{-m} = \left(\frac{e}{2}\right)^m + m.\left(\frac{e}{2}\right)^{m+2} + \frac{m(m+3)}{1.2}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+4} + \frac{m(m+4)(m+5)}{2.3}\left(\frac{e}{2}\right)^{m+6} + \text{enz.}$$

Bepaalt men zich nu tot de zesde magten van e, dan komt er

$$e' = \frac{e}{2} + \frac{e^3}{2^3} + \frac{e^5}{2^4},$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{2^3} + \frac{5.e^6}{2^6},$$

$$e'^3 = \frac{e^3}{2^3} + \frac{3.e^5}{2^5},$$

$$e'^4 = \frac{e^4}{2^4} + \frac{e^6}{2^4},$$

$$e'^5 = \frac{e^5}{2^5},$$

waardoor de reeks (β') verandert in

$$\vartheta = u + \left(e + \frac{e^3}{2^2} + \frac{e^5}{2^3}\right) sin.\, u + \left(\frac{e^2}{2^2} + \frac{e^4}{2^3} + \frac{5e^6}{2^6}\right) sin.\, 2u$$

$$+ \left(\frac{e^3}{3.2^2} + \frac{e^5}{2^4}\right) sin.\, 3u + \left(\frac{e^4+e^6}{2^5}\right) sin.\, 4u + \frac{e^5}{5.2^4}\, sin.\, 5u,$$

zoodat men, na volbragte substitutien en rangschikking der termen, volgens de magten van e, zal vinden

$$\vartheta = \varphi + 2e\, sin.\varphi + \frac{5}{4} e^2\, sin.2\varphi$$

$$+ \frac{e^3}{2^2.3}(13\, sin.\, 3\varphi - 3\, sin.\varphi) + \frac{e^4}{2^5.3}(103\, sin.\, 4\varphi - 44\, sin.\, 2\varphi)$$

$$+ \frac{e^5}{2^6.3.5}(1097\, sin.\, 5\varphi - 645\, sin.\, 3\varphi + 50\, sin.\varphi) + \text{enz.};$$

welke reeks ook onder den navolgenden vorm kan geschreven worden,

$$\vartheta = \varphi + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right) sin.\varphi$$

$$+ \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right) sin.\, 2\varphi + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right) sin.3\varphi$$

$$+ \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right) sin.\, 4\varphi + \frac{1097}{960}e^5\, sin.\, 5\varphi, + \text{enz.}$$

en waardoor nu de gevraagde ontwikkeling gevonden is.

Voor zeer geringe waarden van e zal men mogen stellen,

$$\vartheta = \varphi + 2e\, sin.\varphi, \quad \text{en} \quad r = a(1 - e\, cos.\varphi).$$

DRIE EN TWINTIGSTE LES.

Theorie der lijnen van dubbele kromming. Bepaling van hare raaklijnen, normalen, rakende vlakken enz.

§ 164. Wanneer de achtervolgende elementen eener kromme lijn niet in hetzelfde vlak gelegen zijn, wordt deze kromme genaamd eene lijn van dubbele kromming (*ligne à double courbure*). Zoodanige kromme kan gegeven zijn, hetzij door twee van hare projectiën op de coördinaten-vlakken, hetzij door twee gebogen oppervlakken, uit welker snijding zij ontstaat. Het eerste geval is blijkbaar in het laatste opgesloten, dewijl de kromme lijn alsdan beschouwd kan worden als de doorsnede van twee cilinder-vlakken, welke de genoemde projectiën tot rigtlijnen hebben, en waarvan de beschrijvende lijnen evenwijdig aan twee der coördinaten-assen loopen.

Laten deze projectiën op de xz en yz-vlakken tot vergelijkingen hebben

$$x = f(z), \qquad y = F(z).$$

Nemen wij op den omtrek der gegevene kromme twee punten M, M', welker coördinaten zijn x, y, z, en $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, dan zal de afstand $MM' = D$ dezer beide punten tot waarde hebben

$$D = \sqrt{\left\{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right\}},$$

terwijl de snijlijn MM' met de positieve assen der x, y, z hoeken vormt, welker cosinussen uitgedrukt worden door de breuken

$$\frac{\Delta x}{D}, \quad \frac{\Delta y}{D}, \quad \frac{\Delta z}{D}.$$

Gaat men nu van de eindige aangroeijingen tot de differentialen dx, dy, dz over, dan verandert de snijlijn MM' in de raaklijn van het punt M, en de afstand of de koorde D mag dan, even als in § 83, door de differentiaal des boogs s, gerekend van eenig vast punt, vervangen worden, zoo dat men tusschen deze vier differentialen de navolgende betrekking bekomt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

en voor de hoeken α, β, γ door de gezegde raaklijn met de assen der x, y, z gevormd

$$cos.\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad cos.\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad cos.\gamma = \frac{dz}{ds},$$

in welke formules de differentialen dx, dy, dz, de projectiën van de differentiaal ds des boogs, op de drie coördinaten-assen voorstellen.

De hoeken α, β, γ zijn tevens de complementen der hoeken welke de raaklijn in het punt M vormt, met hare projectiën op de yz, xz en xy-vlakken, dat is met de raaklijnen aan de drie projectie-krommen, getrokken door de projectie van het punt M op die vlakken.

Noemen wij de coördinaten van een onbepaald punt der raaklijn x', y', z', dan zal men de vergelijkingen dezer lijn kunnen voorstellen door

$$x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z), \qquad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z), \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin de differentiaal-quotienten $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ uit de vergelijkingen der kromme $x = f(z)$, $y = F(z)$ zijn af te leiden.

§ 165. Is de kromme gegeven door twee vergelijkingen tusschen drie veranderlijken,

$$F(x, y, z) = 0, \qquad f(x, y, z) = 0,$$

dat is door de snijding van twee gebogen oppervlakken, welke door deze vergelijkingen voorgesteld worden, dan heeft men de differentiaal-betrekkingen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0, \\ \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waaruit men, met behulp der vergelijkingen (1), gemakkelijk vindt

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx}(x'-x) + \frac{dF}{dy}(y'-y) + \frac{dF}{dz}(z'-z) = 0, \\ \frac{df}{dx}(x'-x) + \frac{df}{dy}(y'-y) + \frac{df}{dz}(z'-z) = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

zijnde de vergelijkingen van twee vlakken, welker doorsnede de raaklijn aan het punt (x, y, z) oplevert. Door achtervolgens $y'-y$

en $x'-x$ uit dezelve te elimineren, bekomt men voor de projectiën dezer raaklijn op de xz en yz-vlakken de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{df}{dx}\frac{dF}{dy}\right)(x'-x)+\left(\frac{dF}{dz}\frac{df}{dy}-\frac{df}{dz}\frac{dF}{dy}\right)(z'-z)=0,\\ \left(\frac{dF}{dy}\frac{df}{dx}-\frac{df}{dy}\frac{dF}{dx}\right)(y'-y)+\left(\frac{dF}{dz}\frac{df}{dx}-\frac{df}{dz}\frac{dF}{dx}\right)(z'-z)=0,\end{array}\right\}\quad(4)$$

welke insgelijks hadden kunnen verkregen worden, door uit (2) de waarden der differentiaal-quotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ af te leiden, en vervolgens in (1) te substitueren.

Elk vlak gaande door de raaklijn van eenig punt, is een rakend vlak der kromme aan dat punt. Het vlak loodregt op de raaklijn door het raakpunt gebragt, heet normaal-vlak, terwijl elke in dat vlak en door dat punt getrokken lijn eene normaal der kromme genaamd wordt. Het aantal dezer normalen is dus onbepaald, en elk derzelve staat loodregt op de raaklijn van gezegd punt.

Stellende voor de vergelijking van het normale vlak, gaande door het punt (x, y, z),

$$A(x'-x)+B(y'-y)+C(z'-z)=0,$$

dan zijn die zijner doorsneden, met de xz en yz-vlakken,

$$A(x'-x)+C(z'-z)=By,$$
$$B(y'-y)+C(z'-z)=Ax,$$

en omdat deze lijnen loodregt staan op de projectiën der raaklijn, heeft men de betrekkingen

$$\frac{A}{C}=\frac{dx}{dz},\qquad \frac{B}{C}=\frac{dy}{dz}.$$

Alzoo komt er voor de vergelijking van het normaal-vlak

$$\left.\begin{array}{ll} & (x'-x)\frac{dx}{dz}+(y'-y)\frac{dy}{dz}+z'-z=0 \quad\ldots\\ \text{of} & (x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz=0\end{array}\right\}(5)$$

Men kan tot die vergelijking ook regtstreeks geraken op de volgende wijze.

Indien men de punten M, M' tot middelpunten aanneemt van twee bollen met gelijke stralen R beschreven, staat de gemeene doorsnede dezer bollen loodregt op de lijn MM'. Beschouwende nu het normale vlak als de limiet dezer doorsnede, wanneer de punten

M, M' meer en meer tot elkander naderen, zoo heeft men voor de vergelijkingen der beide bollen, welker middelpunten tot coördinaten hebben x, y, z, $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$,

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=R^2,$$

en $$(x'-(x+dx))^2+(y'-(y+dy))^2+(z'-(z+dz))^2=R^2.$$

Door deze vergelijkingen van elkander af te trekken, en hierbij de differentialen der tweede orde te verwaarloozen, verkrijgt men blijkbaar dezelfde uitkomst, als of men de eerste ten aanzien van x, y, z differentieert, namelijk

$$(x'-x)dx+(y'-y)dy+(z'-z)dz=0,$$

zijnde dezelfde vergelijking als hiervoren gevonden is.

Na elken term door ds gedeeld te hebben, kan men die vergelijkingen tevens onder den navolgenden vorm schrijven,

$$(x'-x)\cos.\alpha+(y'-y)\cos.\beta+(z'-z)\cos.\gamma=0,$$

zijnde hierin α, β, γ de hoeken door de raaklijn met de assen der x, y, z gevormd, en waaruit tevens blijkt, dat die lijn loodregt staat op het normaal vlak.

§ 166. Verbeelden wij ons thans een vlak, gaande door drie op elkander volgende of oneindig digt bij elkander gelegen punten M, M', M'' der kromme (*fig.* 56), dan wordt dat vlak, uithoofde het tevens door de raaklijnen MT, $M'T'$ van twee achtervolgende punten M, M' gaat, het tangentiële of ook het krommings-vlak, (*plan osculateur*) genaamd, vermits het den kromte-cirkel van het punt M bevat. Men stelle voor de vergelijking van dat vlak,

$$a(x'-x)+b(y'-y)+z'-z=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Daar hetzelve tevens door de punten M', M'' gaat, welker coördinaten zijn

$$x+dx, \quad y+dy, \quad z+dz,$$

$$x+2dx+d^2x, \quad y+2dy+d^2y, \quad z+2dz+d^2z,$$

moet aan de aangenomen vergelijking ook voldaan worden, door substitutie dezer coördinaten voor x, y, z, waaruit twee nieuwe vergelijkingen zullen ontstaan.

Na achtervolgende aftrekkingen zal men verkrijgen,

$$adx+bdy+dz=0,$$

$$ad^2x+bd^2y+d^2z=0,$$

zijnde dezelfde vergelijkingen, welke men door twee opvolgende differentiatiën ten aanzien van x, y, z, onmiddelijk uit (6) zou hebben kunnen afleiden. Voor de hieruit voortvloeijende waarden van a en b, bekomt men gemakkelijk

$$a = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{dxd^2y - dyd^2x}, \qquad b = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{dxd^2y - dyd^2x},$$

zoodat de vergelijking van het krommingsvlak wordt

$$(dyd^2z - dzd^2y)(x' - x) + (dzd^2x - dxd^2z)(y' - y) + (dxd^2y - dyd^2x)(z' - z) = 0. \quad (7)$$

Stellende hierin kortheidshalve

$$dyd^2z - dzd^2y = X,$$
$$dzd^2x - dxd^2z = Y,$$
$$dxd^2y - dyd^2x = Z,$$

dan gaat de voorgaande vergelijking over in

$$X(x' - x) + Y(y' - y) + Z(z' - z) = 0,$$

waaruit nu verder de stand van dat vlak ten aanzien der coördinaten-vlakken kan worden opgemaakt.

Daar de kromme door twee vergelijkingen tusschen drie veranderlijke grootheden gegeven is, zou men eene dezer laatsten gelijkmatig kunnen doen aangroeijen, en hare differentiaal dus als standvastig aannemen, waardoor de vorenstaande vergelijking eene eenigzins eenvoudigere gedaante zoude verkrijgen.

Men is echter veelal gewoon elke der drie differentialen dx, dy, dz veranderlijk aan te nemen, en de vergel. (7) alzoo hare symetrieke zamenstelling te laten behouden, waardoor men tevens in de gelegenheid is elke der drie coördinaten als functie eener vierde veranderlijke te beschouwen, welker differentiaal hierbij als standvastig kan aangenomen worden, gelijk onder anderen in de analytische Mechanica plaats vindt.

§ 167. Tot opheldering der voorgaande theorie zullen wij haar op eene bekende lijn van dubbele kromming, de gewone schroeflijn namelijk, van toepassing maken.

Zij a de straal des cilinders, waarop de schroeflijn beschreven is; h de hoogte van den schroefgang, s de lengte des boogs gerekend van het laagste punt, en $a\varphi$ de projectie van dien boog op het xy-vlak, overeenkomende met het grondvlak des cilinders.

De vergelijkingen der schroeflijn zijn alsdan

$$x = a\cos.\varphi, \qquad y = a\sin.\varphi, \qquad z = \frac{h\varphi}{2\pi} = m\varphi,$$

of

$$x = a\cos.\frac{z}{m}, \qquad y = a\sin.\frac{z}{m},$$

waarbij de as des cilinders tot as der z is aangenomen.

Hieruit volgt vooreerst

$$dx = -\frac{a}{m}\sin.\frac{z}{m}dz, \qquad dy = \frac{a}{m}\cos.\frac{z}{m}dz,$$

dus

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{m^2}\right)}dz,$$

of

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{(a^2 + m^2)}.$$

Ter bepaling van de rigting der raaklijn in eenig willekeurig punt der kromme, heeft men

$$\cos.\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{-a\sin.\varphi}{\sqrt{(a^2+m^2)}}, \qquad \cos.\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{a\cos.\varphi}{\sqrt{(a^2+m^2)}},$$

$$\cos.\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{m}{\sqrt{(a^2+m^2)}}.$$

Deze laatste uitdrukking onafhankelijk van den hoek φ zijnde, leert ons, dat de rigting der raaklijn overal eenen standvastigen hoek maakt met de beschrijvende lijnen des cilinders.

Stellende nog den hoek, waaronder de raaklijn op het vlak der xy helt, $= \delta$, dan is

$$tg.\delta = \cot.\gamma = \frac{m}{a} = \frac{h}{2a\pi}.$$

De vergelijkingen der raaklijn zijn

$$x' - x = -\frac{a\sin.\varphi}{m}(z' - z),$$

$$y' - y = \frac{a\cos.\varphi}{m}(z' - z),$$

of

$$y' - y = -\cot.\varphi\,(x' - x).$$

De projectie der raaklijn op het xy vlak is dus loodregt op den straal des grondvlaks, die naar de projectie van het raakpunt gerigt is.

Het normaal vlak zal tot vergelijking hebben

$$a\, sin.\, \varphi\, (x' - x) - a\, cos.\, \varphi\, (y' - y) - m\, (z' - z) = 0,$$

of

$$a\, (x'\, sin.\, \varphi - y'\, cos.\, \varphi) + m\, (z' - z) = 0.$$

In de onderstelling van dz en dus ook van ds standvastig, heeft men

$$d^2x = -\frac{a}{m^2}\, cos.\, \frac{z}{m}\, dz^2, \qquad d^2y = -\frac{a}{m^2}\, sin.\, \frac{z}{m}\, dz^2.$$

Derhalve

$$X = -dzd^2y = \frac{a}{m^2}\, sin.\, \frac{z}{m}\, dz^3 = \frac{a}{m^2}\, sin.\, \varphi\, dz^3,$$

$$Y = dzd^2x = -\frac{a}{m^2}\, cos.\, \frac{z}{m}\, dz^3 = -\frac{a}{m^2}\, cos.\, \varphi\, dz^3,$$

$$Z = dxd^2y - dyd^2x = \frac{a^2}{m^3}\, dz^3,$$

waardoor men voor de vergelijking van het krommings-vlak verkrijgt,

$$(x' - x)\, sin.\, \varphi - (y' - y)\, cos.\, \varphi + \frac{a}{m}\, (z' - z) = 0,$$

of

$$m\, (x'\, sin.\, \varphi - y'\, cos.\, \varphi) + a\, (z' - z) = 0.$$

De hoek door dat vlak met dat der xy gevormd, heeft tot *cosinus* $\frac{a}{\sqrt{(a^2+m^2)}}$ en dus tot *tangens* $\frac{m}{a}$; zijnde alzoo gelijk aan den hoek δ tusschen de raaklijn en het grondvlak begrepen. Het blijkt hieruit dat het krommings-vlak overal dezelfde helling heeft op het grondvlak des cilinders.

VIER EN TWINTIGSTE LES.

Vervolg der voorgaande theorie. Onderzoek naar den kromte-cirkel en de ontwondenen bij lijnen van dubbele kromming. Bepaling der polair-vlakken, keerlijnen, buigpunten, keerpunten, enz.

§ 168. Stellen wij den oneindig kleinen hoek $TM'T'$ (*fig.* 56), tusschen twee achtervolgende raaklijnen begrepen, door ε voor, dan zal, even als bij eene vlakke kromme, de kromtestraal R in het punt M (§ 106) tot waarde hebben

$$R = \frac{ds}{\varepsilon} \quad \text{of} \quad \frac{1}{R} = \frac{\varepsilon}{ds}.$$

De hoek ε, welke hier de krommingshoek genaamd wordt, dewijl zij bij eene standvastige aangroeijing van den boog s, tot maat der kromming strekt, laat zich op de navolgende wijze in functie van de differentialen der coördinaten van het punt M uitdrukken.

Noemen wij α', β', γ' de hoeken door de raaklijn $M'T'$ met de coördinaten-assen gevormd, dan hebben wij, volgens eene bekende formule,

$$\cos.\varepsilon = \cos.\alpha \cos.\alpha' + \cos.\beta \cos.\beta' + \cos.\gamma \cos.\gamma'.$$

Men stelle nu kortheidshalve

$$\cos.\alpha = \frac{dx}{ds} = t, \qquad \cos.\beta = \frac{dy}{ds} = u, \qquad \cos.\gamma = \frac{dz}{ds} = v.$$

dan is klaarblijkelijk, bij den overgang van het punt M tot het naburige punt M',

$$\cos.\alpha' = t + dt, \qquad \cos.\beta' = u + du, \qquad \cos.\gamma' = v + dv.$$

Hieruit ontstaan alzoo de drie navolgende vergelijkingen

$$t^2 + u^2 + v^2 = 1,$$

$$(t + dt)^2 + (u + du)^2 + (v + dv)^2 = 1,$$

$$t(t + dt) + u(u + du) + v(v + dv) = \cos.\varepsilon.$$

De som der beide eerste met het dubbel der derde verminderende, komt er

$$2(1-\cos.\epsilon) = 4\sin.^2\frac{1}{2}\epsilon = dt^2 + du^2 + dv^2,$$

of $$2\sin.\frac{1}{2}\epsilon = \epsilon = \sqrt{(dt^2+du^2+dv^2)}$$

$$= \sqrt{\{(d\cos.\alpha)^2 + (d\cos.\beta)^2 + (d\cos.\gamma)^2\}}. \quad . \quad (1)$$

Derhalve

$$\frac{1}{R} = \frac{\epsilon}{ds} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right\}}.$$

Beschouwen wij thans ds als standvastig, dan hebben wij, voor t, u, v hunne waarden substituerende, ter bepaling van den kromtestraal de eenvoudige formule

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}}. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

In geval ds veranderlijk is, zal men in de plaats der voorgaande differentiaal-quotienten, de navolgende moeten stellen, te weten:

$$\text{voor } \frac{d^2x}{ds^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^3},$$

$$\text{»} \quad \frac{d^2y}{ds^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dsd^2y - dyd^2s}{ds^3},$$

$$\text{»} \quad \frac{d^2z}{ds^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dsd^2z - dzd^2s}{ds^3}.$$

De som der vierkanten van de tellers dezer drie gebrokens, laat zich onder dezen vorm schrijven

$$ds^2\left((d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2\right) + (d^2s)^2(dx^2+dy^2+dz^2)$$
$$- 2\,dsd^2s\,(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z),$$

welke uitdrukking, omdat

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

en dus

$$dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = dsd^2s$$

is, overgaat in

$$ds^2\left((d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2\right) - (d^2s)^2.$$

Derhalve komt er

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{\left((d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2\right)}}{ds^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wil men echter die waarde eeniglijk in functie van de diffe-

rentialen dx, dy, dz uitdrukken, dan hebbe men slechts $(d^2s)^2$ te vervangen door

$$\frac{(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z)^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

als wanneer de form. (3) verandert in deze

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{ds^3} \sqrt{\left\{ ((d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \right.}$$
$$\left. - (dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z)^2 \right\},$$

en men zal zich gemakkelijk kunnen verzekeren, dat die uitdrukking ook vatbaar is onder den navolgenden vorm voorgesteld te worden.

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{\{(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dxd^2z - dzd^2x)^2\}}}{ds^3}, \quad (4)$$

waaruit (§ 166) verder volgt

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}.$$

§ 169. Onder het onbepaald aantal normalen, welke door eenig punt der kromme kunnen getrokken worden, is bijzonderlijk te onderscheiden die, welke tevens in het krommingsvlak gelegen is, en uit dien hoofde met de rigting des kromtestraals overeenstemt. Men is gewoon haar de hoofd-normaal te noemen, en hare rigting ten aanzien der drie coördinaten-assen, laat zich aldus bepalen. Men stelle de hoeken, welke zij met die assen vormt, $= l, m, n$, dan zal men voor de vergelijkingen van deze normaal of van den kromtestraal kunnen schrijven,

$$x' - x = \frac{\cos. l}{\cos. n}(z' - z), \qquad y' - y = \frac{\cos. m}{\cos. n}(z' - z),$$

en aangezien die lijn de gemeene doorsnede vormt van het krommings- of tangentiële vlak met het normaal vlak, respectivelijk tot vergelijkingen hebbende,

$$X(x' - x) + Y(y' - y) + Z(z' - z) = 0,$$
$$(x' - x)\,dx + (y' - y)\,dy + (z' - z)\,dz = 0,$$

welke, na substitutie der voorgaande waarden van $x' - x$ en $y' - y$, overgaan in

$$X \cos. l + Y \cos. m + Z \cos. n = 0,$$
$$\cos. l\, dx + \cos. m\, dy + \cos. n\, dz = 0,$$

zoo vindt men hieruit

$$(Z\,dx - X\,dz)\cos.l + (Z\,dy - Y\,dz)\cos.m = 0,$$

$$(Y\,dx - X\,dy)\cos.l + (Y\,dz - Z\,dy)\cos.n = 0,$$

dus
$$\frac{\cos.m}{\cos.l} = \frac{Z\,dx - X\,dz}{Y\,dz - Z\,dy},$$

$$\frac{\cos.n}{\cos.l} = \frac{X\,dy - Y\,dx}{Y\,dz - Z\,dy},$$

en
$$\cos.l = \frac{Y\,dz - Z\,dy}{\sqrt{\{(X\,dy - Y\,dx)^2 + (Y\,dz - Z\,dy)^2 + (Z\,dx - X\,dz)^2\}}}. \quad (5)$$

De grootheid onder het wortelteeken kan ook onder de navolgende gedaante voorgesteld worden:

$$\begin{aligned} & X^2(ds^2 - dx^2) + Y^2(ds^2 - dy^2) + Z^2(ds^2 - dz^2) \\ & \quad - 2(XY\,dxdy + YZ\,dydz + XZ\,dxdz) \\ & = (X^2 + Y^2 + Z^2)\,ds^2 - (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)^2 \\ & = (X^2 + Y^2 + Z^2)\,ds^2, \end{aligned}$$

als zijnde de grootheden X, Y, Z aan elkander verbonden door de betrekking

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Hierdoor bekomt men ter bepaling der hoeken l, m, n, in verband tot formule (5),

$$\cos.l = \frac{Ydz - Zdy}{ds\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2)}} = R\left(\frac{Ydz - Zdy}{ds^4}\right),$$

$$\cos.m = \frac{Zdx - Xdz}{ds\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}} = R\left(\frac{Zdx - Xdz}{ds^4}\right),$$

$$\cos.n = \frac{Xdy - Ydx}{ds\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}} = R\left(\frac{Xdy - Ydx}{ds^4}\right),$$

Substitueren wij thans in de tellers dezer gebrokens voor $X, Y, Z,$ hunne hiervoren opgegevene waarden, dan ondergaan zij de navolgende herleidingen,

$$\begin{aligned} Ydz - Zdy &= (dzd^2x - dxd^2z)dz - (dxd^2y - dyd^2x)dy \\ &= (dz^2 + dy^2)d^2x - (dyd^2y + dzd^2z)dx \\ &= (ds^2 - dx^2)d^2x - (dsd^2s - dxd^2x)dx \\ &= (dsd^2x - dxd^2s)ds = ds^3.d\left(\frac{dx}{ds}\right). \end{aligned}$$

Op gelijke wijze vinden wij

$$Zdx - Xdz = ds^2.d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

$$Xdy - Ydx = ds^2.d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Derhalve verkrijgen de voorgaande waarden van $cos. l$, $cos. m$, $cos. n$, deze meer eenvoudige vormen,

$$cos. l = R\frac{d.\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}. \quad cos. m = R\frac{d.\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}. \quad cos. n = R\frac{d.\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}. \quad (6)$$

De coördinaten van het middelpunt des kromte-cirkels laten zich nu met behulp dezer laatste formules gemakkelijk bepalen. Stellende namelijk voor die coördinaten x', y', z', dan heeft men

$$x' - x = R\,cos. l, \qquad y' - y = R\,cos. m, \qquad z' - z = R\,cos. n.$$

Derhalve

$$x' - x = R^2\frac{d.\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},$$

$$y' - y = R^2\frac{d.\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds},$$

$$z' - z = R^2\frac{d.\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds},$$

of ingevalle men x, y, z als functiën van s beschouwt, en daarbij ds standvastig neemt,

$$\left.\begin{aligned} x' - x &= R^2\frac{d^2x}{ds^2} \\ y' - y &= R^2\frac{d^2y}{ds^2}. \;\ldots\ldots\ldots \\ z' - z &= R^2\frac{d^2z}{ds^2} \end{aligned}\right\} (7)$$

Substitueert men deze waarden in de vergelijking

$$R = \sqrt{\left((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2\right)},$$

dan vindt men hieruit wederom dezelfde waarde van R als in formule (2) aangewezen. De vergelijkingen (7) kunnen onder anderen dienen, om na eliminatie der waarden van x, y, z, met behulp der beide ver-

gelijkingen van de gegevene kromme, de twee projectien te vinden van de meetkunstige plaats der middelpunten van de kromtecirkels.

§ 170. Brengen wij door twee achtervolgende elementen MM', $M'M''$ der kromme, twee normale vlakken, zich snijdende volgens de lijn AB (*fig.* 57), dan worden die vlakken door het krommingsvlak, gaande door de drie punten M, M', M'', gesneden volgens de lijnen OC, $O'C$, die de doorsnede AB ontmoeten in eenig punt C, dat blijkbaar het middelpunt des kromte-cirkels zijn zal, dewijl OC en $O'C$ hier twee hoofdnormalen voorstellen, behoorende tot twee opvolgende elementen der kromme. Daar wijders de lijn AB loodregt staat op het vlak des kromte-cirkels, is het klaar, dat elk willekeurig punt P op gelijken afstand verwijderd is van de punten M, M', M'', en derhalve als pool of middelpunt van dezen kromte-cirkel kan aangenomen worden. Uit dien hoofde heeft de doorsnede AB den naam van poollijn verkregen. De doorsneden AB, $A'B'$, $A''B''$ enz. der opvolgende normaal-vlakken, liggen twee aan twee in hetzelfde vlak, en vormen mitsdien op deze wijze een ontwikkelbaar oppervlak, genaamd *polair oppervlak*, als zijnde de meetkunstige plaats der poolen van al de kromtecirkels.

Om de vergelijking van dat oppervlak te bekomen, late men in die van het normaal-vlak

$$(x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz=0\,.\quad .\quad .\quad (\alpha)$$

x, y, z met hare differentialen aangroeijen; men verkrijgt alsdan die van het oneindig nabij gelegen normaal-vlak, welks snijding met het voorgaande, de poollijn oplevert.

De nieuwe vergelijking op die wijze uit (α) ontstaande, zal met weglating der differentialen van de derde orde, dezelfde zijn, als die, welke uit de onmiddelijke differentiatie van (α) verkregen wordt, te weten:

$$(x'-x)\,d^2x+(y'-y)\,d^2y+(z'-z)\,d^2z-ds^2=0\,.\quad .\quad (\beta)$$

Wanneer men nu x, y, z elimineert tusschen de vergelijkingen (α), (β) en die der gegevene kromme, zal men op die wijze eene vergelijking tusschen x', y', z' bekomen, welke die van het polaire oppervlak zal zijn.

Uit de snijdingen der achtervolgende poollijnen ontstaat eene kromme genaamd de keerlijn (*arrête de rebroussement*) van het gezegde oppervlak.

Deze lijn van dubbele kromming wordt in hare opvolgende punten door de poollijnen geraakt. Het polaire oppervlak kan dus beschouwd worden als de meetkunstige plaats der raaklijnen van de keerlijn.

Door de vergelijking (β) op nieuw te differentieren ten aanzien van x, y, z, verkrijgt men de navolgende van de derde orde

$$(x' - x)\,d^3x + (y' - y)\,d^3y + (z' - z)\,d^3z$$
$$= 3(dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z) = 3\,ds d^2s,$$

waaruit in vereeniging met (α), (β) en de vergelijkingen der gegevene kromme, de veranderlijken x, y, z kunnen geëlimineerd worden, zoodat daaruit twee vergelijkingen tusschen x', y', z' overig blijven, die de projectiën der keerlijn op twee der coördinaten-vlakken zullen opleveren.

Indien men door vier opvolgende punten M, M_1, M_2, M_3 der kromme eenen bol laat gaan, zal het middelpunt van dezen bol bepaald worden door het snijpunt van twee achtervolgende poollijnen AB, $A'B'$. De keerlijn eener kromme kan derhalve ook beschouwd worden, als de meetkunstige plaats der middelpunten van al de rakende bollen (*sphères osculatrices*). De coördinaten x', y', z' van het middelpunt des bols behoorende tot eenig punt der gegevene kromme, laten zich met behulp der vergelijkingen (α), (β), (γ), in functiën van x, y, z uitdrukken.

§ 171. De middelpunten der achtervolgende kromte-cirkels vormen geenszins, even als bij elke vlakke kromme lijn het geval is, de ontwondene der gegevene kromme. Om zich hiervan te overtuigen, zoo beschouwe men eene reeks poollijnen AB, $A'B'$..., waarin C, C', C''... de middelpunten der achtervolgende kromte-cirkels, en dus CO, $C'O'$, $C''O''$ de kromte-stralen aanduiden. Daar nu deze stralen loodregt op de poollijnen staan, en twee achtervolgende poollijnen niet aan elkander evenwijdig loopen, kunnen ook de punten C', C''... niet op het verlengde der kromtestralen OC, $O'C'$ gelegen zijn. Derhalve kan ook de kromme door al die punten gaande, deze kromte-stralen niet tot raaklijnen hebben, en alzoo door ontwinding de gegevene kromme onmogelijk voortbrengen.

Trekt men echter in het eerste normaalvlak naar eenig willekeurig punt P der doorsnede AB, eene lijn OP, die insgelijks tot de normalen der kromme zal behooren, dan kan men de punten

O' en P door eene lijn vereenigen, en deze tot in het punt P' der volgende doorsnede $A'B'$ verlengen; vervolgens eene lijn door O'' naar P' trekken, en deze wederom tot in het punt P'' der doorsnede $A''B''$ verlengen.

Op die wijze voortgaande, verkrijgt men eene reeks punten P, P', P''... liggende op de achtervolgende poollijnen, en waarvan de meetkunstige plaats eene kromme zal zijn, door welker ontwinding de gegevene kromme zal kunnen voortgebragt worden. Daar nu het punt P geheel willekeurig genomen is, blijkt hieruit terstond, dat elke lijn van dubbele kromming een oneindig aantal ontwondenen zal toelaten, insgelijks van dubbele kromming zijnde, en die allen in het polaire oppervlak zullen gelegen zijn. Al die ontwondenen bezitten de eigenschap van tot regte lijnen over te gaan, zoodra het polaire oppervlak tot een plat vlak ontwikkeld wordt, hetgeen zich uit de figuur gemakkelijk laat opmaken.

Immers, de beide normalen OP, $O'P$ maken gelijke hoeken met de doorsnede AB; hetzelfde heeft plaats met de normalen $O'P'$, $O''P'$ ten aanzien der volgende doorsnede $A''B''$, en even zoo met al de overigen. Laat men nu het normaal vlak AD om de lijn AB draaijen, tot dat het op het volgende vlak $A'D'$ kome te leggen, dan valt OP op $O'P$ en dus op het verlengde van $P'P$. Bij eene tweede omdraaijing om de doorsnede $A'B'$, zal de normaal $O'P'$ op $O''P'$ en dus op het verlengde van $P''P'$ komen te vallen. Hieruit blijkt alzoo ten duidelijkste, dat de elementen der krommelijn P, P', P''... bij de achtervolgende ontwikkeling van het polaire oppervlak zich op dezelfde regte lijn zullen plaatsen, en zulks geldt evenzeer ten aanzien van elke andere ontwondene der gegevene kromme. Daar wijders deze elementen bij die ontwikkeling hunne lengten behouden, zoo volgt hieruit tevens deze eigenschap, dat de kortste afstand tusschen twee punten ergens op het polaire oppervlak genomen, zal aangewezen worden door den boog der ontwondene, welke die beide punten vereenigt.

Beschouwen wij eene willekeurige kromme lijn op het oppervlak eens bols beschreven. Haar polair oppervlak zal klaarblijkelijk een kegelvlak vormen, tot top hebbende het middelpunt van den bol, en tot rigtlijn de kromme lijn zelve. Immers de normale vlakken door de elementen dezer kromme gebragt, zullen insgelijks loodregt op het oppervlak van den bol staan; de poollijnen zijn hier de stralen, die zich allen in het middelpunt

snijden. De verschillende ontwondenen der gegevene kromme zullen derhalve allen op dat kegel-oppervlak gelegen zijn.

Indien de kromme in eene vlakke kromme lijn overgaat, zal de meetkunstige plaats der punten C hare ontwondene zijn. De poollijnen alsdan loodregt staande op het vlak der kromme, loopen onderling evenwijdig, en het polaire oppervlak verandert in een cilindrisch vlak, tot rigtlijn hebbende de genoemde ontwondene. Wij leeren hieruit tevens, dat ook elke vlakke kromme, behalve hare gewone ontwondene, welke reeds in de XIVe Les behandeld is, nog een oneindig aantal ontwondenen van dubbele kromming bezit, waarvan het cilindrische polaire oppervlak de meetkunstige plaats voorstelt. Al deze ontwondenen zullen op het vlak der gegevene kromme geprojecteerd worden volgens de gewone ontwondene. Elke kromme kan derhalve op een oneindig aantal wijzen door ontwinding eener andere kromme voortgebragt worden.

§ 172. De opvolgende elementen eener lijn van dubbele kromming in verschillende vlakken gelegen zijnde, ondergaan hierdoor eene afzonderlijke buiging of wringing, welker hoegrootheid, in navolging van hetgeen bij de gewone kromming plaats heeft, gemeten wordt door de verhouding van den oneindig kleinen hoek ε' begrepen tusschen twee opvolgende krommings-vlakken tot de differentiaal des boogs. Deze hoek ε' is blijkbaar dezelfde als die, welke door twee opvolgende poollijnen, die op gemelde vlakken loodregt staan, gevormd wordt.

Stellende nu voor de hoeken door de eerste dezer poollijnen met de positieve assen der x, y, z gevormd, α', β', γ', dan heeft men op gelijke wijze als hiervoren (§ 168) voor den hoek ε gevonden is,

$$\varepsilon' = \sqrt{\left\{(d\cos.\alpha')^2 + (d\cos.\beta')^2 + (d\cos.\gamma')^2\right\}}.$$

Daar deze lijn loodregt staat op het krommingsvlak tot vergelijking hebbende (§ 167)

$$X(x'-x) + Y(y'-y) + Z(z'-z) = 0.$$

zoo is

$$\cos.\alpha' = \frac{X}{S},\quad \cos.\beta' = \frac{Y}{S},\quad \cos.\gamma' = \frac{Z}{S} \quad . \; . \; . \quad (8)$$

zijnde hierin $S = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$ gesteld.

Op grond dus der formule (4) zal men, na daarin dx, dy, dz, ds, door X, Y, Z, S, vervangen te hebben, onmiddelijk bekomen

$$\varepsilon' = \frac{\sqrt{\{(XdY - YdX)^2 + (YdZ - ZdY)^2 + (XdZ - ZdX)^2\}}}{S^2} \quad . \quad (9)$$

tot welke uitkomst men ook aldus had kunnen geraken.

Uit de vorenstaande vergelijking van het krommings-vlak, behoorende tot het punt (x, y, z), vindt men die voor het punt $(x + dx, y + dy, z + dz)$ door de coëfficiënten X, Y, Z, met hunne differentialen te doen aangroeijen. Stellen wij dan kortheidshalve

$$X + dX = X', \qquad Y + dY = Y', \qquad Z + dZ = Z',$$

dan komt er voor de vergelijkingen der twee opvolgende krommings-vlakken

$$X(x' - x) + Y(y' - y) + Z(z' - z) = 0,$$
$$X'(x' - x) + Y(y' - y) + Z'(z' - z) = 0,$$

en dus voor den sinus van den hoek tusschen die vlakken begrepen, volgens eene bekende formule,

$$sin.\, \varepsilon' = \sqrt{\left\{\frac{(XY' - YX')^2 + (YZ' - ZY')^2 + (XZ' - XZ')^2}{(X^2 + Y^2 + Z^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)}\right\}}.$$

Hierin voor X', Y', Z' hare vorige waarden substituerende, en tevens in den noemer de differentialen weglatende, zal men voor $sin.\, \varepsilon'$ of ε' dezelfde waarde als voren zien te voorschijn komen.

Door eene der differentialen, bijv. dx standvastig aan te nemen, heeft men

$$X = dyd^2z - dzd^2y, \qquad \text{dus } dX = dyd^3z - dzd^3y,$$
$$Y = -dxd^2z, \qquad dY = -dxd^3z,$$
$$Z = dxd^2y, \qquad dZ = dxd^3y,$$

waardoor men voor den hoek ε' de navolgende meer eenvoudige waarde verkrijgt

$$\varepsilon' = \frac{dxds\,(d^2yd^3z - d^2zd^3y)}{dx^2((d^2y)^2 + (d^2z)^2) + (dyd^2z - dzd^2y)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Is de kromme lijn eene vlakke, dan bestaat er tusschen de coördinaten x, y, z de betrekking

$$z = Ax + By + C,$$

waaruit volgt

$$dz = Adx + Bdy,$$
$$d^2z = Bd^2y,$$
$$d^3z = Bd^3y.$$

derhalve
$$d^2yd^3z - d^2zd^3y = 0,$$

en als dan wordt ook $\varepsilon' = 0$, zoo als zulks behoort te zijn.

§ 173. Bij lijnen van dubbele kromming kunnen twee verschillende soorten van buigpunten voorhanden zijn. De eerste ontstaat indien in een gedeelte der kromme drie op elkander volgende elementen zich in hetzelfde vlak bevinden, en dus de hoek ε' nul wordt, waardoor de dubbele kromming aldaar verdwijnt. De coördinaten van zoodanig punt, hetwelk een *enkelvoudig buigpunt* genaamd wordt, moeten blijkens form. (10) alsdan voldoen aan de differentiaal-betrekking

$$d^2yd^3z - d^2zd^3y = 0,$$

of
$$d.\left(\frac{d^2z}{d^2y}\right) = 0.$$

Is nu de kromme gegeven door de vergelijkingen $z = \varphi(x)$, $y = f(x)$, welke die van hare projectien op de xz- en xy-vlakken voorstellen, dan laten zich uit deze drie vergelijkingen de enkelvoudige buigpunten bepalen.

De tweede soort heeft plaats, indien twee op elkander volgende elementen in eene regte lijn liggen, en dus $\varepsilon = 0$ wordt, hetgeen van zelf medebrengt dat ε' insgelijks $= 0$ zij. In dat geval wordt $R = \frac{1}{0}$; derhalve moeten de coördinaten x, y, z op grond van form. (4), voldoen aan de vergelijkingen

$$dxd^2y - dyd^2x = 0,$$
$$dyd^2z - dzd^2y = 0,$$
$$dxd^2z - dzd^2x = 0,$$

welke, indien men ook hier dx standvastig neemt, in de twee volgende overgaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

ten blijke dat de projectien van het buigpunt tevens met de buigpunten van de beide projecten der kromme overeenkomen, het-

geen ook gemakkelijk te voorzien was. Hetzelfde geldt mede ten aanzien der keerpunten, en nademaal de kromtestraal in de buig- en keerpunten insgelijks nul kan worden, zoo zullen de vergelijkingen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ of } \infty, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 0 \text{ of } \infty,$$

de voorwaarden tot het bestaan van een buig- of van een keerpunt opleveren.

§ 174. Passen wij thans de hiervoren afgehandelde theorie insgelijks op de gewone schroeflijn toe.

In § 167 is reeds voor die kromme gevonden

$$\frac{dx}{ds} = \frac{-a\sin.\varphi}{\sqrt{(a^2+m^2)}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{a\cos.\varphi}{\sqrt{(a^2+m^2)}}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{m}{\sqrt{(a^2+m^2)}}$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{(a^2+m^2)}.$$

De lengte des kromtestraals volgens form. (2) berekenende, heeft men

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{-a\cos.\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(a^2+m^2)}\, ds} = \frac{-a\cos.\varphi}{a^2+m^2},$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{-a\sin.\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(a^2+m^2)}\, ds} = \frac{-a\sin.\varphi}{a^2+m^2},$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Derhalve

$$\frac{1}{R} = \frac{a}{a^2+m^2}, \quad \text{of} \quad R = a + \frac{m^2}{a},$$

waaruit blijkt, dat de schroeflijn overal dezelfde kromming heeft, welke echter kleiner is dan die van den omtrek des grondvlaks.

Wijders vindt men ter bepaling van de rigting des kromtestraals, met behulp der formules (6), hierin wederom ds standvastig aannemende,

$$\cos.l = R\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{-Ra\cos.\varphi}{a^2+m^2} = -\cos.\varphi,$$

$$\cos.m = R\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{-Ra\sin.\varphi}{a^2+m^2} = -\sin.\varphi,$$

$$\cos.n = R\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

De kromtestraal in elk punt is dus evenwijdig aan het grondvlak gerigt, en wordt geprojecteerd volgens den straal, gaande door de horizontale projectie van dat punt, zoodat hij de as des cilinders snijdt. Hieruit blijkt, dat de meetkunstige plaats van de middelpunten der kromtecirkels eene tweede schroeflijn is van denzelfden schroefgang, doch beschreven op een cilinder, welks grondvlak tot straal heeft $\frac{m^2}{a}$. Deze gevolgtrekking laat zich insgelijks uit de waarden der coördinaten van het middelpunt des kromtecirkels opmaken. Immers, de vergelijkingen

$$x' - x = R\cos.l, \qquad y' - y = R\cos.m, \qquad z' - z = 0,$$

geven terstond

$$x' = a\cos.\varphi - \left(\frac{a^2 + m^2}{a}\right)\cos.\ \varphi = -\frac{m^2}{a}\cos.\varphi,$$

$$y' = a\sin.\varphi - \left(\frac{a^2 + m^2}{a}\right)\sin.\ \varphi = -\frac{m^2}{a}\sin.\ \varphi,$$

$$z' = z.$$

Den hoek, welken de raaklijnen aan die schroeflijn met het xy vlak vormen δ' noemende, zal

$$tg.\ \delta' = \frac{ah}{2m^2\pi} = \frac{a}{m} \text{ zijn.}$$

Voor den krommingshoek $\varepsilon = \frac{ds}{R}$, vindt men

$$\varepsilon = \frac{ads}{a^2 + m^2} = \frac{adz}{m\sqrt{(a^2 + m^2)}}.$$

Om den buigings- of wringings-hoek ε' te bepalen, heeft men, gebruik makende van de in § 167 reeds opgegeven waarden van X, Y, Z, met toepassing der formule (8),

$$\cos.\alpha' = \frac{X}{S} = \frac{m\sin.\ \varphi}{\sqrt{(a^2 + m^2)}},$$

$$\cos.\beta' = \frac{Y}{S} = \frac{-m\cos.\ \varphi}{\sqrt{(a^2 + m^2)}},$$

$$\cos.\gamma' = \frac{Z}{S} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + m^2)}},$$

Dus
$$d.\cos.\alpha' = \frac{m\cos.\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(a^2+m^2)}},$$
$$d.\cos.\beta' = \frac{m\sin.\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(a^2+m^2)}},$$
$$d.\cos.\gamma' = 0,$$
waaruit volgt (§ 172)
$$\varepsilon' = \frac{m\,d\varphi}{\sqrt{(a^2+m^2)}} = \frac{dz}{\sqrt{(a^2+m^2)}}.$$

In elk punt der kromme zal de poollijn, die met den kromtestraal een regten hoek vormt, blijkbaar eene raaklijn zijn aan het cilindervlak, waarop de binnenste schroeflijn beschreven is. Tevens loodregt op het krommings-vlak staande, vormt zij met het grondvlak des cilinders een' hoek, die tot tangens heeft $\frac{a}{m}$, en dus denzelfden hoek, welken de gemelde schroeflijn met dat grondvlak vormt. De poollijn is alzoo steeds raaklijn aan de binnenste schroeflijn, en het polaire oppervlak komt diensvolgens overeen met het ontwikkelbare oppervlak, waarvan de schroeflijn de keerlijn vormt.

Om de vergelijking van dat vlak te bekomen ga men aldus te werk. Men differentiëre de in § 167 gevondene vergelijking van het normaal vlak
$$m(z'-z) = a(x'\sin.\varphi - y'\cos.\varphi),$$
ten opzigte van φ, dan komt er
$$-m\frac{dz}{d\varphi} = -m^2 = a(x'\cos.\varphi + y'\sin.\varphi).\ .\ .\ .\ (a)$$

De coördinaten der poollijnen moeten blijkbaar aan deze beide vergelijkingen voldoen. Eliminerende alzoo de grootheden z en φ met behulp der vergelijkingen van de schroeflijn, dan zal de hieruit ontstaande vergelijking in x', y', z' tot de meetkunstige plaats der poollijnen behooren, en dus de vergelijking van het bedoelde oppervlak zijn.

De som der vierkanten van die beide vergelijkingen geeft,
$$m^4 + m^2(z'-z)^2 = a^2(x'^2+y'^2),$$
of
$$m^2(z'-m\varphi)^2 = a^2(x'^2+y'^2) - m^4,$$
en
$$m\varphi = z' - \sqrt{\left\{\frac{a^2}{m^2}(x'^2+y'^2) - m^2\right\}}.$$

Deze waarde van φ substituerende in (a), komt er

$$x' \cos.\left\{\frac{z'}{m} - \sqrt{\left(\frac{a^2(x'^2+y'^2)}{m^4} - 1\right)}\right\}$$
$$+ y' \sin.\left\{\frac{z'}{m} - \sqrt{\left(\frac{a^2(x'^2+y'^2)}{m^2} - 1\right)}\right\} + \frac{m^2}{a} = 0.$$

Zij $\frac{m^2}{a} = r$, en stellen wij hierin $z' = 0$, dan vinden wij voor de doorsnede van het polaire oppervlak met het xy vlak,

$$x' \cos.\frac{\sqrt{x'^2+y'^2-r^2}}{r} - y' \sin.\frac{\sqrt{x'^2+y'^2-r^2}}{r} + r = 0,$$

zijnde de vergelijking der ontwindende van den cirkel, wiens straal $= r$ is, en waarvan de oorsprong op het negatieve gedeelte van de as der x genomen is.

VIJF EN TWINTIGSTE LES.

Over de aanrakingen van verschillende orden bij lijnen van dubbele kromming.

§ 175. Even als bij de vlakke krommen, kunnen er ook bij lijnen van dubbele kromming, aanrakingen van verschillende orden plaats vinden. Zijn bijv. *MP*, *MN* (*fig.* 58), twee zulke kromme lijnen, die in het punt *M* eene gemeenschappelijke raaklijn hebben, en *P*, *N* twee van hare punten, op gelijke doch oneindig kleine afstanden van het raakpunt *M* verwijderd, dan zal men, in navolging van hetgeen bij de vlakke krommen bepaald is (*XVIe Les*), kunnen aannemen, dat de aanraking der beide krommen in het punt *M* van de n^e orde zal zijn, bijaldien de afstand der punten *P*, *N* eene oneindig kleine van de $(n+1)^e$ orde wordt. Projecterende nu deze krommen op eenig willekeurig vlak, bijv. op dat der xy, dan zullen, in het algemeen, de afstand *PN* en hare projectie *pn* oneindig kleinen van dezelfde orde zijn: alleen in het geval, waarin de driehoek *MPN* op het projectie-vlak helt onder een' hoek, die oneindig weinig van een' regten hoek verschilt, zal de projectie *pn* in eene oneindig kleine van eene hoogere orde overgaan. Daar wijders de projectien *mp*, *mn* der beide krommen in het punt *m* eene gemeenschappelijke raaklijn hebben, en de afstand *pn*, behoudens het zoo even vermelde uitzonderings-geval, eene oneindig kleine van de $(n+1)^e$ orde is, zal er ook tusschen die beide laatste krommen eene raking van de n^e orde plaats vinden.

Tot dezelfde uitkomst geraakt men door de beschouwing der projectiën op de beide overige coördinaten-vlakken, en hierdoor laat zich derhalve het onderzoek der aanrakingen bij lijnen van dubbele kromming terug brengen tot dat der vlakke krommen. Wil men alzoo de orde van aanraking van twee lijnen van dubbele kromming bepalen, zoo hebbe men slechts met behulp van

hare vergelijkingen te onderzoeken hoe vele der achtervolgende differentiaal-quotienten

$$\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, \frac{d^2x}{dz^2}, \frac{d^2y}{dz^2}, \frac{d^3x}{dz^3}, \frac{d^3y}{dz^3} \ldots\ldots$$

in het gemeenschappelijk punt (x, y, z) voor beide krommen dezelfde waarden bekomen. Zijn de laatste dezer differentiaal-quotienten van de n^e orde, dan hebben de projectiën op twee der coördinaten-vlakken, en dus ook de kromme lijnen zelve eene raking van die orde. Bijaldien echter de projectiën op een der coördinaten-vlakken eene aanraking van eene hoogere orde dan die op het andere coördinaten-vlak hebben, zal men steeds de laagste der beide orden als die der aanraking van beide kromme lijnen moeten beschouwen.

§ 176. Passen wij het voorgaande toe op het bepalen van den kromte-cirkel, dat is van den cirkel, die met eenige gegevene kromme eene raking van de tweede orde bezit. Van dezen cirkel zal niet alleen de straal en ligging van zijn middelpunt, maar tevens de stand van zijn vlak, ten aanzien der coördinaten-vlakken, behooren gezocht te worden.

Beschouwen wij dan den kromte-cirkel als de doorsnede van een bol met een vlak, gaande door zijn middelpunt.

Zij $$(x'-a)^2+(y'-b)^2+(z'-c)^2 = R^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

de vergelijking des bols, en

$$Ax'+By'+z' = C,$$

die van het snijdende vlak.

Daar dat vlak ondersteld wordt door het middelpunt van den bol te gaan, kan zijne vergelijking ook onder dezen vorm geschreven worden,

$$A(x'-a)+B(y'-b)+(z'-c) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Door het achtervolgens elimineren van twee der veranderlijke grootheden, bijv. x' en y', tusschen de vergelijkingen (1) en (2), zal men twee vergelijkingen bekomen, welke die der projectiën des cirkels op de yz- en xz-vlakken zullen zijn. Voor eene raking der tweede orde tusschen de beide krommen, moet thans in het raakpunt (x, y, z) voldaan worden aan de voorwaarden

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dx'}{dz'}, \quad \frac{dy}{dz}=\frac{dy'}{dz'}, \quad \frac{d^2x}{dz^2}=\frac{d^2x'}{dz'^2}, \quad \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{d^2y'}{dz'^2}.$$

Differentiëren wij alzoo de vergelijkingen (1) en (2) twee achtervolgende malen ten aanzien van z, en veranderen wij hierbij gelijktijdig x', y', z' in x, y, z, dan verkrijgen wij, dz standvastig aannemende, de navolgende vergelijkingen:

$$(x-a)\frac{dx}{dz}+(y-b)\frac{dy}{dz}+z-c=0,$$

$$(x-a)\frac{d^2x}{dz^2}+(y-b)\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dx^2}{dz^2}+\frac{dy^2}{dz^2}+1=0,$$

$$A\frac{dx}{dz}+B\frac{dy}{dz}+1=0,$$

$$A\frac{d^2x}{dz^2}+B\frac{d^2y}{dz^2}=0.$$

Stellen wij wijders ter bekorting,

$$\frac{dx}{dz}=p,\quad \frac{d^2x}{dz^2}=p_1,\quad \frac{dy}{dz}=q,\quad \frac{d^2y}{dz^2}=q_1.$$

De zes onbekenden a, b, c, A, B, R, laten zich thans bepalen met behulp der vergelijkingen

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$A(x-a)+B(y-b)+z-c=0 \quad \ldots\ldots (4)$$

$$p(x-a)+q(y-b)+z-c=0 \quad \ldots\ldots (5)$$

$$p_1(x-a)+q_1(y-b)+\frac{ds^2}{dz^2}=0 \quad \ldots\ldots (6)$$

$$pA+qB+1=0 \quad \ldots\ldots (7)$$

$$p_1A+q_1B=0 \quad \ldots\ldots (8)$$

De beide laatste geven terstond voor A en B de navolgende waarden

$$A=\frac{-q_1}{pq_1-qp_1},\quad B=\frac{p_1}{pq_1-qp_1}.$$

Uit (4) en (5) vindt men gemakkelijk

$$(Aq-Bp)(x-a)+(q-B)(z-c)=0,$$

$$(Bp-Aq)(y-b)+(p-A)(z-c)=0,$$

en hierin voor A en B de zoo even gevondene waarden in de plaats stellende, komt er

$$(pp_1+qq_1)(x-a)+\{p_1-q(pq_1-qp_1)\}(z-c)=0,$$

$$(pp_1+qq_1)(y-b)+\{q_1+p(pq_1-qp_1)\}(z-c)=0.$$

De eerste dezer vergelijkingen met p_1 en de tweede met q_1 vermenigvuldigende, zoo vindt men uit de som dezer producten, op grond van vergelijking (6),

$$(pp_1+qq_1)\frac{ds^2}{dz^2}=\left(p_1^2+q_1^2+(pq_1-qp_1)^2\right)(z-c).$$

Derhalve

$$z-c=\frac{(pp_1+qq_1)\,(1+p^2+q^2)}{p_1^2+q_1^2+(pq_1-qp_1)^2},$$

$$y-b=-\frac{(q_1+p\,(pq_1-qp_1))\,(1+p^2+q^2)}{p_1^2+q_1^2+(pq_1-qp_1)^2},$$

$$x-a=-\frac{(p_1-q\,(pq_1-qp_1))\,(1+p^2+q^2)}{p_1^2+q_1^2+(pq_1-qp_1)^2},$$

en hieruit bekomt men verder, ingevolge vergel. (3), na eenige herleidingen,

$$R=\frac{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left\{p_1^2+q_1^2+(pq_1-qp_1)^2\right\}}},$$

waardoor nu de coördinaten van het middelpunt, zoo mede de straal des kromtecirkels in functie van x, y, z kunnen bepaald worden.

Men zal zonder moeite inzien, dat de zoo even gevonden waarde van R geheel overeenkomt met die volgens form. (4) van § 168, nadat in deze laatste $d^2z=0$ gesteld zal zijn.

Dat ook de waarden van $x-a$, $y-b$, $z-c$ in overeenstemming zijn met die, welke wij in § 169 onder eenen meer eenvoudigen vorm hebben verkregen, te weten:

$$a-x=R^2\,\frac{d.\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},$$

$$b-y=R^2\,\frac{d.\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds},$$

$$c-z=R^2\,\frac{d.\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}$$

hiervan zal men zich spoedig door de navolgende herleidingen

kunnen verzekeren. Men heeft namelijk, in de onderstelling van dz standvastig

$$\frac{d.\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \frac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^3} = \frac{ds^2d^2x - dxdsd^2s}{ds^4}$$

$$= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,d^2x - dx\,(dxd^2x + dyd^2y)}{ds^4}$$

$$= \frac{(dy^2 + dz^2)\,d^2x - dxdyd^2y}{ds^4}$$

$$= \left(\frac{dz^2}{ds^2}\right)^2 \left(\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{dy}{dz}\left(\frac{dyd^2x}{dz^2} - \frac{dxd^2y}{dz^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{(1+p^2+q^2)^2}\,(p_1 - q(pq_1 - qp_1)).$$

Op gelijke wijze vindt men

$$\frac{d.\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} = \frac{1}{(1+p^2+q^2)^2}\,(q_1 + p(pq_1 - qp_1)),$$

$$\frac{d.\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = -\frac{1}{(1+p^2+q^2)^2}\,(pp_1 + qq_1),$$

en aangezien

$$\frac{R^2}{(1+p^2+q^2)^2} = \frac{1+p^2+q^2}{p_1^2 + q_1^2 + (pq_1 - qp_1)^2},$$

komt er, na substitutie

$$x - a = -R^2\frac{d.\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = -\frac{p_1 - q\,(pq_1 - qp_1)}{p_1^2 + q_1^2 + (pq_1 - qp_1)^2}(1+p^2+q^2),$$

$$y - b = -R^2\frac{d.\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} = -\frac{q_1 + p\,(pq_1 - qp_1)}{p_1^2 + q_1^2 + (pq_1 - qp_1)^2}(1+p^2+q^2),$$

$$z - c = -R^2\frac{d.\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = \frac{(pp_1 + qq_1)(1+p^2+q^2)}{p_1^2 + q_1^2 + (pq_1 - qp_1)^2},$$

even als hiervoren gevonden is.

Er blijft thans nog overig het vlak te bepalen, waarin de kromtecirkel gelegen is. Te dien einde geeft ons de vergelijking

$$A(x - a) + B(y - b) + z - c = 0,$$

na hierin voor A en B hunne waarden geschreven te hebben, terstond

$$q_1(x-a) - p_1(y-b) + (p_1q - pq_1)(z-c) = 0,$$

of $$(x-a)d^2y - (y-b)d^2x + (z-c)(d^2xdy - dxd^2y) = 0,$$

welke juist dezelfde is als die van het krommings-vlak, reeds in § 166 gevonden, nadat men in deze laatste $d^2z = 0$ zal gesteld hebben.

Men zal overigens gemakkelijk inzien, dat de vergelijkingen (5) en (6) twee vlakken voorstellen loodregt op het krommings-vlak (4) staande, en welker doorsnijdingen met dit laatste, twee achtervolgende hoofdnormalen opleveren, zoo dat het punt (a, b, c) het snijpunt dezer lijnen is.

ZES EN TWINTIGSTE LES.

Theorie der gebogen oppervlakken. Bepaling der rakende- en normaal vlakken.

§ 177. Elk gebogen vlak wordt gegeven door eene vergelijking tusschen drie veranderlijke grootheden x, y, z, voorstellende de drie regtstandige coördinaten van een willekeurig punt van het oppervlak. Deze vergelijking komt onder een dezer vormen

$$z = \varphi(x, y), \qquad f(x, y, z) = 0,$$

voor, waaruit de twee navolgende differentiaal-betrekkingen afgeleid worden.

1°.
$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy,$$

of
$$dz = p\, dx + q\, dy, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

indien namelijk de partiële differentiaal-quotienten van z ten aanzien van x en y, kortheidshalve door p en q aangeduid worden; en

2°.
$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Trekt men door eenig punt (x, y, z) willekeurige kromme lijnen op het gebogen vlak, dan zullen de raaklijnen in dat punt tot deze verschillende krommen behoorende, allen in hetzelfde vlak gelegen zijn, en het rakende vlak aan het punt (x, y, z) vormen. Deze eigenschap laat zich onder anderen aldus betoogen.

Voor eene dezer krommen naar welgevallen, heeft de raaklijn tot vergelijkingen

$$x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z), \qquad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z),$$

waarin de differentialen dx, dy, dz aan elkander verbonden zijn door de betrekking

$$dz = p\, dx + q\, dy,$$

of
$$1 = p \frac{dx}{dz} + q \frac{dy}{dz}.$$

Vermenigvuldigende nu deze laatste met $z'-z$, verkrijgt men, na eliminatie der onbepaalde differentiaal-quotienten $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, met behulp der beide voorgaande vergelijkingen, voor de meetkunstige plaats van al de raaklijnen

$$z'-z=(x'-x)\frac{dz}{dx}+(y'-y)\frac{dz}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zijnde eene vergelijking van den eersten graad, ten aanzien van x', y', z', en dus die van een plat vlak.

Het rakende vlak bezit derhalve de eigenschap, dat, indien men hetzelve door een willekeurig vlak, gaande door het raakpunt, snijdt, de gemeene doorsnede altijd eene raaklijn zal zijn aan de kromme, volgens welk het gebogen oppervlak door dit laatste vlak gesneden wordt. Hieruit volgt verder, dat het rakende vlak geheel bepaald is, indien de rigtingen der raaklijnen aan twee willekeurige doorsneden van het oppervlak door het raakpunt gebragt, bekend zijn.

§ 178. In overeenstemming met de eigenschap der raaklijnen aan kromme lijnen, kan men elk rakend vlak aan eenig punt van een gebogen oppervlak, beschouwen als de limiet van alle vlakken, gaande door dat punt en twee andere naburige punten van het oppervlak. Stellen wij alzoo voor de vergelijking van het gezochte vlak

$$A(x'-x)+B(y'-y)+C(z'-z)=0.$$

Dat vlak gaat reeds door het punt (x, y, z), en men kan nu voor de coördinaten der twee overige punten nemen

$$x+dx, \quad y, \quad z+\frac{dz}{dx}dx,$$

$$x, \quad y+dy, \quad z+\frac{dz}{dy}dy.$$

Deze coördinaten moeten insgelijks aan de vorige vergelijking voldoen, en door hare substitutie voor x', y', z', verkrijgt men, ter bepaling der verhoudingen $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$,

$$A+C\frac{dz}{dx}=0, \quad \text{en} \quad B+C\frac{dz}{dy}=0,$$

dus
$$\frac{A}{C}=-\frac{dz}{dx}, \quad \frac{B}{C}=-\frac{dz}{dy},$$

waardoor de aangenomene vergelijking overgaat in

$$z' - z = (x' - x)\frac{dz}{dx} + (y' - y)\frac{dz}{dy},$$

zijnde dezelfde als die, welke hiervoren uit andere gronden afgeleid is.

Stelt men in deze vergelijking

$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy \quad \text{en} \quad z' = z + dz,$$

dan wordt zij

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

ten blijke alzoo, dat het rakend vlak tevens gerigt is door elk ander punt op een oneindig kleinen afstand van het raakpunt genomen, en dus de meetkunstige plaats is der raaklijnen aan de onderscheidene kromme lijnen, door het raakpunt op het oppervlak getrokken.

Is het gebogen oppervlak gegeven door eene vergelijking van den vorm

$$f(x, y, z) = 0,$$

dan heeft men ter bepaling der partiële differentiaal-quotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$,

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} = 0,$$

en hierdoor gaat de vergelijking van het rakend vlak over in

$$(x' - x)\frac{df}{dx} + (y' - y)\frac{df}{dy} + (z' - z)\frac{df}{dz} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

welke meer symetrieke vorm tevens het voordeel oplevert van uit de differentiaal-vergelijking van het oppervlak

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0,$$

onmiddelijk te kunnen worden afgeleid, door namelijk in deze laatste voor de differentialen dx, dy, dz, te schrijven de drie verschillen

$$x' - x, \quad y' - y, \quad z' - z.$$

Het is tevens gemakkelijk in te zien, dat de vergelijkingen (3) en (4) haren vorm behouden, ook in het geval, waarin x, y, z scheefhoekige in plaats van regthoekige coördinaten voorstellen.

Even als de raaklijn aan eene kromme, behalve het raakpunt nog andere punten met haar gemeen kan hebben, zal ook een rakend vlak door eenig punt van een gebogen oppervlak gebragt, dit laatste tevens in andere punten of volgens kromme lijnen kunnen doorsnijden, zoo als onder anderen bij de ringvormige oppervlakken plaats vindt, indien het raakpunt op dat gedeelte van het oppervlak gelegen is, dat het binnenste blad genaamd wordt.

Bij de ontwikkelbare oppervlakken, welke door vlakken volgens regte lijnen kunnen gesneden worden, gelijk onder anderen de kegel- en cilinder-oppervlakken, zal het rakend vlak eene beschrijvende lijn met het oppervlak gemeen hebben. Bij scheve oppervlakken daarentegen, waarbij twee opvolgende standen der beschrijvende lijn niet in hetzelfde vlak liggen, zal de raking slechts in een enkel punt kunnen geschieden.

§ 179. De lijn door het raakpunt loodregt op een rakend vlak getrokken, en welke de normaal van dat punt genaamd wordt, zal tot vergelijkingen hebben

$$x'-x=-\frac{dz}{dx}(z'-z),\qquad y'-y=-\frac{dz}{dy}(z'-z),$$

of ook

$$(x'-x)\frac{df}{dz}=(z'-z)\frac{df}{dx},\quad (y'-y)\frac{df}{dz}=(z'-z)\frac{df}{dy}.$$

De vergelijkingen der normaal en van het rakend vlak volgens (4) blijven dezelfde, ook dan, wanneer het oppervlak tot vergelijking heeft

$$F(x,\ y,\ z)=a.$$

De hoeken α, β, γ, welke de normaal met de assen der positieve x, y, z vormt, worden uitgedrukt door de formules

$$\cos.\alpha=\frac{-\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}\right)}}=\frac{-p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},$$

$$\cos.\beta=\frac{-\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}\right)}}=\frac{-q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},$$

$$\cos.\gamma=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},$$

of stellende ter bekorting

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2\right\}}=V,$$

dan heeft men insgelijks

$$cos.\alpha=\frac{1}{V}\frac{df}{dx},\qquad cos.\beta=\frac{1}{V}\frac{df}{dy},\qquad cos.\gamma=\frac{1}{V}\frac{df}{dz}.$$

De hoeken α, β, γ zijn dezelfde als die, waaronder het rakend vlak op de vlakken der yz, xz en xy helt.

De vergelijking van het rakend vlak laat zich thans, met behulp dezer hoeken, ook aldus schrijven:

$$(x'-x)\,cos.\alpha+(y'-y)\,cos.\beta+(z'-z)\,cos.\gamma=0.$$

Elk vlak door de normaal gebragt, staat loodregt op het rakend vlak en dus op eene der raaklijnen, die door het punt $(x,\ y,\ z)$ kunnen getrokken worden.

Zij dan

$$A(x'-x)+B(y'-y)+C(z'-z)=0,$$

de vergelijking van een dezer normaal-vlakken, en laat de raaklijn, waarop hetzelve loodregt gerigt is, tot vergelijking hebben

$$x'-x=\frac{dx}{dz}(z'-z),\qquad y'-y=\frac{dz}{dy}(z'-z),$$

dan zal $\quad\frac{C}{A}=\frac{dz}{dx}\quad$ en $\quad\frac{C}{B}=\frac{dz}{dy}\quad$ moeten zijn,

waaruit volgt, voor de vergelijking van eenig normaal-vlak,

$$(x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz=0\ .\ .\ .\ (5)$$

welke, omdat de differentialen dx, dy, dz, slechts door eene enkele betrekking aan elkander verbonden zijn, alle mogelijke normaalvlakken voorstelt, die door het punt $(x,\ y,\ z)$ der kromme kunnen gebragt worden.

Men zoude de verg. (5) evenzeer hebben kunnen bekomen, door het normaal vlak te beschouwen als de limiet der doorsnijdings-vlakken van twee gelijke bollen, welker middelpunten op eene willekeurige doorsnede van het gebogen oppervlak liggende, elkander meer en meer naderen, op dezelfde wijze als zulks reeds in § 165 ten aanzien der lijnen van dubbele kromming is aangetoond.

§ 180. Gaan wij thans tot eenige toepassingen op bekende oppervlakken over.

1°. *De bol.* $x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$

dus $xdx + ydy + zdz = 0,$

waaruit onmiddelijk volgt voor de vergelijking van het rakend vlak (§ 178) form. (4),

$$(x' - x)\,x + (y' - y)\,y + (z' - z)\,z = 0,$$

of $xx' + yy' + zz' = r^2.$

De vergelijkingen der normaal zijn

$$x' - x = (z' - z)\frac{x}{z}, \qquad y' - y = (z' - z)\frac{y}{z},$$

of $x' = \frac{x}{z}z', \qquad y' = \frac{y}{z}z',$

ten blijke, dat de normaal overal door het middelpunt van den bol gerigt is.

2°. *De ellipsoïde.* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2} = 0.$$

Vergelijking van het rakend vlak

$$(x' - x)\frac{x}{a^2} + (y' - y)\frac{y}{b^2} + (z' - z)\frac{z}{c^2} = 0,$$

of $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1.$

Dat het rakend vlak slechts een enkel punt met de ellipsoïde gemeen heeft, laat zich gemakkelijk aldus bewijzen. Indien namelijk een ander punt (x', y', z') van het oppervlak mede in het rakend vlak gelegen ware, zou men, behalve de beide voorgaande vergelijkingen, nog de volgende hebben,

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

uit welke drie vergelijkingen volgt,

$$\left(\frac{x' - x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y' - y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z' - z}{c}\right)^2 = 0.$$

Derhalve $x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z.$

De vergelijkingen der normaal zijn hier

$$x' - x = \frac{c^2 x}{a^2 x}(z' - z), \qquad y' - y = \frac{c^2 y}{b^2 z}(z' - z).$$

3°. *De hyperboloïde met een blad.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

Voor het rakend vlak vindt men als voren, na verandering van c^2 en $-c^2$,

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta)$$

en voor de vergelijkingen der normaal

$$x' - x = -\frac{c^2 x}{a^2 z}(z' - z), \qquad y' - y = -\frac{c^2 y}{b^2 z}(z' - z),$$

Om de doorsneden van het rakend vlak met de hyperboloïde te onderzoeken, heeft men de vergelijking

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

met (α) en (β) te combineren. Uit deze drie vergelijkingen laat zich gemakkelijk de navolgende afleiden,

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\right) - \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2}\right)^2$$

$$= \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{z'^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{zz'}{c^2}\right)^2,$$

of

$$\left(\frac{xy' - yx'}{ab}\right)^2 = \left(\frac{z' - z}{c}\right)^2.$$

De doorsnijding heeft derhalve plaats volgens twee regte lijnen, welker projectiën op de coördinaten-vlakken kunnen bepaald worden, met behulp der vergelijkingen

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2} = 1, \qquad \frac{xy' - yx'}{ab} = \pm\left(\frac{z' - z}{c}\right).$$

4°. *De hyperboloïde met twee bladen.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Het rakend vlak heeft tot vergelijking

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=-1,$$

welke uit die voor de ellipsoïde afgeleid wordt, door voor a^2 en b^2 te schrijven $-a^2$ en $-b^2$. De beide voorgaande vergelijkingen combinerende met de volgende

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=-1,$$

zal men, op gelijke wijze als in het vorige voorbeeld, bekomen

$$\left(\frac{xy'-yx'}{ab}\right)^2+\left(\frac{z'-z}{c}\right)^2=0.$$

Derhalve $xy'-yx'=0$, of $y'=\frac{x'y}{x}$ en $z'=z$.

Deze waarden substituerende in de vergelijking van het rakend vlak, komt er

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{y^2x'}{b^2x}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

of $$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{x'}{x}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Dus $x'=x$ en $y'=y$, waaruit blijkt dat het rakend vlak slechts één enkel punt met de hier beschouwde hyperboloïde gemeen heeft.

5°. *De elliptische paraboloïde.*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2z}{c}=0.$$

Voor het rakend vlak vindt men,

$$(x'-x)\frac{x}{a^2}+(y'-y)\frac{y}{b^2}-\left(\frac{z'-z}{c}\right)=0,$$

of $$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=\frac{z'+z}{c}.$$

Hierbij voegende de vergelijking

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{2z'}{c}=0,$$

komt er $$\left(\frac{x'-x}{a}\right)^2+\left(\frac{y'-y}{b}\right)^2=0,$$

en dus $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, ten blijke dat de raking slechts in één enkel punt geschiedt. Voor de normaal zijn de vergelijkingen

$$a^2 \frac{(x'-x)}{x} = b^2 \frac{(y'-y)}{y} = -c(z'-z).$$

6°. *De hyperbolische paraboloïde.*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0.$$

Door verandering van b^2 in $-b^2$, vindt men uit het voorgaand voorbeeld, voor de vergelijking van het rakend vlak,

$$\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = \frac{z'+z}{c},$$

en tot bepaling zijner doorsneden met het gegeven oppervlak,

$$\left(\frac{x'-x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'-y}{b}\right)^2 = 0,$$

waaruit volgt

$$\frac{x'-x}{a} = \frac{y'-y}{b}, \quad \text{en} \quad \frac{x'-x}{a} = -\left(\frac{y'-y}{b}\right),$$

voor de horizontale projectiën dezer doorsneden, welke met twee beschrijvende lijnen van het oppervlak overeenkomen.

Stellende voor de vergelijking dezer paraboloïde,

$$xy = cz,$$

dan komt er voor die van het rakend vlak,

$$(x'-x)y + (y'-y)x - c(z'-z) = 0,$$

of

$$xy' + yx' = c(z'+z).$$

Uit de verbinding dezer vergelijkingen met de vergelijking

$$x'y' = cz',$$

wordt gevonden

$$xy + x'y' - xy' - yx' = 0,$$

of

$$(x'-x)(y'-y) = 0,$$

dus $x' = x$ en $y' = y$. De snijding geschiedt derhalve volgens twee lijnen, welker horizontale projectiën loodregt staan op de assen der x en y.

De vergelijkingen der normaal zijn

$$x' - x = \frac{y}{x}(y' - y) = -\frac{y}{c}(z' - z).$$

7°. *Het cirkelvormige regte kegelvlak.*

$$h^2(x^2 + y^2) = r^2(h - z)^2,$$

$$h^2(xdx + ydy) + r^2(h - z)\,dz = 0.$$

De vergelijking van het rakend vlak wordt

$$h^2(x' - x)\,x + h^2(y' - y)\,dy + r^2(z' - z)(h - z) = 0,$$

of na herleiding

$$h^2(xx' + yy') - r^2(h - z)(h - z') = 0.$$

Om de doorsneden van het rakend vlak te onderzoeken, heeft men nog de vergelijking

$$h^2(x'^2 + y'^2) = r^2(h - z')^2,$$

dus $$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = (xx' + yy')^2.$$

waaruit volgt $x'y - yx' = 0$, of $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$.

Hierdoor gaat de vergelijking van het rakend vlak over in

$$h^2(x^2 + y^2)\frac{x'}{x} = r^2(h - z)(h - z'),$$

of $$(h - z)^2\frac{x'}{x} = (h - z)(h - z'),$$

dus $$(h - z)\,x' = x(h - z'),$$

en $$(h - z)\,y' = y(h - z),$$

welke beide vergelijkingen de projectiën aanwijzen van eene lijn gaande door den top en het punt (x, y, z). De raking heeft mitsdien volgens eene beschrijvende lijn van het kegelvlak plaats.

8°. *Het horizontale schroefvlak.*

$$z = aB\,tg. = \frac{y}{x};$$

zijnde h de hoogte van den schroefgang, en $\frac{h}{2\pi} = a$,

dus $$dz = a\left(\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}\right),$$

of $$(x^2+y^2)\,dz + aydx - axdy = 0,$$

waaruit volgt voor de vergelijking van het rakend vlak,

$$(z'-z)(x^2+y^2) - a(y'-y)x + a(x'-x)y = 0,$$

of $$(x^2+y^2)(z'-z) + a(x'y - y'x) = 0.$$

Ter bepaling van de doorsneden van dat vlak met het schroefvlak, heeft men nog de vergelijking

$$z' = a\,B\,tg.\frac{y'}{x'},$$

waaruit afgeleid wordt

$$z'-z = a\,B\,tg.\frac{xy'-x'y}{xx'+yy'},$$

dus $$\frac{xy'-yx'}{x^2+y^2} = B\,tg.\frac{xy'-x'y}{xx'+yy'}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Deze transcendentale vergelijking van de horizontale projectie der doorsnede, duidt terstond aan dat het rakend vlak het schroefvlak volgens een oneindig aantal krommen doorsnijdt, en daar de regte lijn tot vergelijking hebbende

$$y' = \frac{y}{x}x',$$

tevens tot de projectiën van deze krommen behoort, en alsdan $z' = z$ wordt, volgt hieruit dat de beschrijvende lijn gaande door het punt (x, y, z) insgelijks eene doorsnede van het rakend vlak zal zijn.

De poolvergelijking der horizontale projectie, neemt eenen vrij eenvoudigen vorm aan. Immers, stellende

$$x' = \rho\cos.\varphi, \quad y' = \rho\sin.\varphi, \quad x = r\cos.a, \quad y = r\sin.a,$$

dan verandert vergel. (a) in

$$\frac{\rho}{r}(\sin.\varphi\cos.a - \cos.\varphi\sin.a) = \varphi - a,$$

of $$\rho = \frac{r(\varphi-a)}{\sin.(\varphi-a)}.$$

Hierin beteekent r de afstand der horizontale projectie van het raakpunt tot de as des cilinders, en a de hoek tusschen deze lijn en de as der x begrepen. Neemt men nu die lijn tot oorsprong der

hoeken aan, dan hebben wij, $\varphi - a = \psi$ stellende, voor de polaire vergelijking van de horizontale projectie der doorsneden van het rakend vlak

$$\rho = \frac{r\psi}{\sin.\psi}.$$

De vergelijkingen der normaal zijn

$$-\frac{x'-x}{y} = \frac{y'-y}{x} = \frac{a(z'-z)}{x^2+y^2}.$$

De eerste toont aan dat de horizontale projectie der normaal van eenig punt loodregt staat op die der beschrijvende lijn door dat punt getrokken.

ZEVEN EN TWINTIGSTE LES.

Over de verschillende soorten van gebogen oppervlakken. Onderzoek naar hare analytische kenmerken.

§ 181. Onder de gebogen oppervlakken bestaan verschillende soorten, welke men, op grond der bijzondere wijze waarop zij kunnen worden voortgebragt, gewoon is van elkander te onderscheiden door de algemeene benamingen van *cilindervormige*, *kegelvormige*, *omwentelings–*, *scheve*, *conoïdische* en *ontwikkelbare oppervlakken*. Wij zullen in deze en in de volgende les die verschillende vormen van oppervlakken nader omschrijven, en tevens de analytische kenmerken opsporen, waardoor zij zich van elkander onderscheiden.

§ 182. *Cilinder-vlakken.* Elke regte lijn, die zich langs den omtrek eener gegevene kromme beweegt, en daarbij evenwijdig aan zich zelve blijft, doorloopt een cilinder-vlak, de gegevene kromme tot rigtlijn hebbende.

Laten $x = az$, $y = bz$ de vergelijkingen zijn eener door den oorsprong getrokken lijn, waaraan de beschrijvende lijn eens cilinder-vlaks evenwijdig blijft. Zij wijders

$$z' - z = (x' - x)\frac{dz}{dx} + y' - y)\frac{dz}{dy},$$

de vergelijking van het rakend vlak aan eenig punt (x, y, z) van het oppervlak.

Daar nu het eerstgemelde vlak steeds evenwijdig aan de genoemde lijn gerigt is, zal de voorgaande vergelijking eeniglijk aan die voorwaarde behoeven te voldoen. Te dien einde onderstelle men dat vlak evenwijdig aan zich zelve naar den oorsprong verplaatst, waardoor zijne vergelijking herleidt wordt tot deze

$$z' = x'\frac{dz}{dx} + y'\frac{dz}{dy},$$

of

$$z' = px' + qy'.$$

De coördinaten van een willekeurig punt der regte lijn

$$x = az, \quad y = bz,$$

zijn thans mede door de voorafgaande vergelijking aan elkander verbonden, en hieruit ontstaat, na substitutie, de betrekking

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1,$$

of

$$pa + qb = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

voorstellende de partiële differentiaal vergelijking welke voor alle cilinder-vlakken geldt, en waarin het bijzondere karakter dezer vlakken bevat is.

§ 183. Men kan daarenboven eene betrekking tusschen eindige grootheden bekomen, die insgelijks een kenmerk der cilinder-vlakken oplevèrt.

Stellen wij namelijk voor de vergelijkingen der beschrijvende lijn

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta.$$

Blijkbaar zullen in de opvolgende standen dezer lijn, de grootheden a, b standvastig, α en β daarentegen veranderlijk zijn. Voor al de punten van het oppervlak, die op dezelfde beschrijvende lijn gelegen zijn, blijven echter β en α insgelijks standvastig. De wijze waarop β en α veranderen, gedurende de beweging der beschrijvende lijn, is eeniglijk afhankelijk van den aard der kromme, welke tot rigtlijn strekt.

Immers, men heeft

$$\alpha = x - az, \quad \beta = y - bz,$$

en indien x', y', z' de coördinaten aanwijzen van het snijpunt dezer kromme met de beschrijvende lijn, dan zal, omdat x' en y' beiden als functiën van z' voorkomen, ook $\alpha = \varphi(x')$ en $\beta = \psi(x')$ mogen gesteld worden, en hieruit volgt dat β tevens als eene functie van α te beschouwen is. Zij dan

$$\beta = f(\alpha),$$

dan zal de vergelijking

$$(y - bz) = f(x - az) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

insgelijks voor alle cilinder-vlakken gelden, zoodra men door f eene functie van onbepaalden vorm aanduidt.

Dat de vergelijkingen (1) en (2) met elkander in overeenstemming zijn, zal terstond blijken, door uit (2) de beide partiële

differentiaal vergelijkingen ten opzigte van x en y af te leiden; men bekomt alsdan

$$-bp = f_1(x-az)(1-ap),$$
$$1-bq = -f_1(x-az)aq,$$

en hieruit door deeling de afgeleide functie $f_1(x-az)$ eliminerende, zullen wij de partiële differentiaal vergelijking (1)

$$ap+bq = 1,$$

onmiddellijk terugvinden.

Deze laatste is bijzonderlijk geschikt, om te onderzoeken of een door zijne vergelijking gegeven vlak al dan niet tot de cilindervlakken behoort. Zij namelijk

$$U = f(x,y,z) = 0,$$

de vergelijking van het vlak, waaruit men door twee partiële differentiatiën afleidt

$$\frac{dU}{dx}+p\frac{dU}{dz} = 0,$$
$$\frac{dU}{dy}+q\frac{dU}{dz} = 0.$$

Indien dus alle waarden van x, y, z voldoen aan de vergelijking

$$a\frac{dU}{dx}+b\frac{dU}{dy}+\frac{dU}{dz} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

zal het gegeven oppervlak een cilindervlak zijn.

Staat de beschrijvende loodregt op het xy-vlak, dan wordt $a=0$, $b=0$, en de vorige vergelijking herleidt zich tot

$$\frac{dU}{dz} = 0,$$

aanduidende dat de vergelijking van het cilindervlak in dat geval de ordinaat z niet bevat, maar overeenkomt met die der projectie van de rigtlijn op het xy-vlak.

Om de vergelijking van het cilindervlak te vinden, wanneer de rigtlijn door hare vergelijkingen

$$x = \varphi(z), \qquad y = \psi(z),$$

gegeven is, heeft men deze te verbinden met de vergelijkingen

$$x-az = \alpha, \qquad y-bz = \beta,$$

als wanneer men na het verdrijven van x, y, z tot eene betrekking tusschen α en β geraakt, welke onder den algemeenen vorm

$$f(\alpha, \beta) = 0$$

kan voorgesteld worden, en hieruit volgt terstond voor de vergelijking van het begeerde vlak,

$$f(x - az, y - bz) = 0,$$

hetgeen met de vergel. (2) overeenstemt.

§ 184. Bijaldien gevraagd wordt voor een gegeven oppervlak het omgeschreven cilindervlak te bepalen, zoo dat de beschrijvende lijnen eene bepaalde rigting hebben, zal het er slechts op aankomen de kromme te bepalen, volgens welke de raking van het gegeven oppervlak met het cilindervlak plaats heeft, waardoor de zaak terstond tot het voorgaande problema teruggebragt wordt.

Is nu $$U = f(x, y, z) = 0$$

de vergelijking van het gegeven oppervlak, dan zullen de coördinaten van al de punten der aanrakings-kromme moeten voldoen aan de vergelijking (3). Uit de combinatie dezer laatste met de vergel. $U = 0$, vindt men de vergelijkingen van de projectiën der bedoelde kromme, waarmede men vervolgens naar de aanwijzing in de vorige § gegeven, te handelen heeft.

Om zulks door een enkel voorbeeld nader toe te lichten, zoo stelle men zich voor het cilindervlak te bepalen, dat om eene ellipsoïde tot vergelijking hebbende

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

kan beschreven worden, wanneer de rigting der beschrijvende lijn gegeven is door hare vergelijkingen $x = az$, $y = bz$.

Door het differentiëren van de vergelijking der ellipsoïde ten opzigte van x, y, z, vindt men

$$\frac{dU}{dx} = 2Ax, \qquad \frac{dU}{dy} = 2By, \qquad \frac{dU}{dz} = 2Cz.$$

Hierdoor gaat (3) over in

$$Aax + Bby + Cz = 0,$$

ten blijke dat de aanrakings-kromme in een plat vlak ligt.

Men verbinde nu de beide voorgaande vergelijkingen met deze:

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta,$$

dan komt er achtervolgens,

$$A(az+\alpha)^2+B(bz+\beta)^2+Cz^2=1,$$

$$Aa(az+\alpha)+Bb(bz+\beta)+Cz=0,$$

of

$$(Aa^2+Bb^2+C)z^2+2(Aa\alpha+Bb\beta)z=(1-A\alpha^2-B\beta^2),$$

$$(Aa^2+Bb^2+C)z+Aa\alpha+Bb\beta=0,$$

waaruit men, na het verdrijven van z, de navolgende betrekking tusschen α en β bekomt,

$$(A\alpha^2+B\beta^2-1)(Aa^2+Bb^2+C)=(Aa\alpha+Bb\beta)^2.$$

Hierin vervolgens voor α en β substituërende $x-az$, $y-bz$, zal men na eenige herleidingen, de vergelijking van het cilindervlak onder den volgenden vorm kunnen schrijven.

$$(Ax^2+By^2+Cz^2-1)(Aa^2+Bb^2+C)=(Aax+Bby+Cz)^2,$$

waaruit insgelijks op te maken is dat de kromme, volgens welke de raking van beide vlakken plaats heeft, in een plat vlak ligt, tot vergelijking hebbende

$$Aax+Bby+Cz=0.$$

§ 185. *Kegelvlakken.* Elk kegelvlak ontstaat uit de beweging eener regte lijn gaande door een vast punt, en schuivende langs den omtrek eener gegevene kromme, rigtlijn genaamd.

Daar het rakend vlak steeds het vaste punt of den top des kegels bevat, zal aan die voorwaarde kunnen voldaan worden, door in de vergelijking van het gezegde vlak

$$z'-z=p(x'-x)+q(y'-y),$$

voor x', y', z', de coördinaten a, b, c van den top te substituëren, en hierdoor verkrijgt men terstond

$$z-c=p(x-a)+q(y-b), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

voor de partiële differentiaal-vergelijking van alle kegelvlakken.

Om eene betrekking in eindige grootheden te bekomen, stelle men voor de vergelijkingen der beschrijvende lijn in een' harer standen,

$$x-a=\alpha(z-c), \qquad y-b=\beta(z-c),$$

waarin nu α en β als veranderlijk voorkomen. Even als zulks (§ 183) voor de cilindervlakken aangetoond is, zal ook hier β als eene functie van α te beschouwen zijn, welke van den aard der rigtlijn afhankelijk is.

Uit de vergelijking $\beta = f(\alpha)$ volgt dus dadelijk voor die der kegelvlakken in het algemeen,

$$\frac{y-b}{z-c} = f\left(\frac{x-a}{z-c}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \quad . \quad (5)$$

Ligt de top in den oorsprong, dan herleidt zich deze vergelijking tot

$$\frac{y}{z} = \varphi\left(\frac{x}{z}\right).$$

Differentiëren wij thans de vergel. (5) achtervolgens ten aanzien van x en y, dan komt er

$$-p\frac{(y-b)}{(z-c)^2} = f_1\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\left\{\frac{(z-c)-p(x-a)}{(z-c)^2}\right\}.$$

of $$p(y-b) = f_1\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\left\{p(x-a)-(z-c)\right\},$$

en $$(z-c)-q(y-b) = -f_1\left(\frac{x-a}{z-c}\right)q(x-a),$$

waaruit men vervolgens door deeling vindt,

$$\frac{z-c-q(y-b)}{p(y-b)} = \frac{q(x-a)}{z-c-p(x-a)},$$

dus $$z-c = p(x-a)+q(y-b),$$

zijnde dezelfde als vergel. (4).

Is nu $U = f(x, y, z) = 0$ de vergelijking van eenig oppervlak, dan zal het tot de kegelvlakken behooren, indien aan de vergelijking

$$(x-a)\frac{dU}{dx} + (y-b)\frac{dU}{dy} + (z-c)\frac{dU}{dz} = 0. \quad . \quad : \quad . \quad (6)$$

voldaan wordt.

Moet men een kegelvlak bepalen, dat om een gegeven oppervlak

$$U = 0$$

beschreven zij, zal men uit de combinatie dezer vergelijking met (6), de projectiën der aanrakings-kromme kunnen afleiden, waardoor dus de rigtlijn van het kegelvlak bekend wordt. Nemen wij wederom tot voorbeeld de ellipsoïde

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

dan geeft de vergel. (6)

$$Ax(x-a) + By(y-b) + Cz(z-c) = 0,$$

of $$Aax + Bby + Ccz = 1.$$

De coördinaten der rigtlijn moeten nu behalve aan de beide voorgaande, tevens aan de vergelijkingen der beschrijvende lijn

$$x - a = \alpha(z - c), \qquad y - b = \beta(z - c),$$

voldoen, waaruit eene bepaalde betrekking tusschen β en α voortvloeit, welke door het verdrijven van x, y, z, uit deze vier vergelijkingen verkregen wordt.

Men zal hiervoor bekomen

$$(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - 1)(A\alpha^2 + B\beta^2 + C) = (Aa\alpha + Bb\beta + Cc)^2,$$

welke vergelijking, na substitutie van

$$\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c},$$

voor α en β, blijken zal, ook onder dezen vorm te kunnen geschreven worden.

$$(Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1)\ (Aa^2 + Bb^2 + Ac^2 - 1)$$
$$= (Aax + Bby + Ccz - 1)^2,$$

aantoonende, dat de raking van het kegelvlak met de ellipsoïde plaats heeft volgens eene kromme, gelegen in het vlak

$$Aax + Bby + Ccz = 1.$$

De projectiën der rigtlijn, welke blijkbaar eene ellips is, zullen gevonden worden door het elimineren van eene der veranderlijke grootheden tusschen deze laatste vergelijking en die der ellipsoïde.

§ 186. *Omwentelings-oppervlakken.* Deze ontstaan door de beweging van eenige lijn van enkele of dubbele kromming, om eene in stelling gegeven as, zoodat elk punt der bewegende kromme een cirkelomtrek beschrijft, tot straal hebbende zijnen afstand tot de as. Elke doorsnede door de as gebragt, wordt een *meridiaan-vlak*, en de kromme lijn van doorsnijding met het oppervlak een *meridiaan* genoemd.

Met deze benaming staat die van *parallel* in verband, welke aan elk der doorgeloopen cirkels loodregt op de omwentelings-as staande, gegeven wordt. Ligt de as met de kromme, die het oppervlak voortbrengt in het zelfde vlak, dan zijn al de meridianen aan die kromme gelijk.

De omwentelings-oppervlakken bezitten de eigenschap, dat het rakend vlak aan eenig punt overal loodregt op het meridiaan-vlak staat. Immers, daar de raaklijn aan de parallel van dat punt in het rakend vlak gelegen is, en loodregt staat zoo wel op den straal als op de omwentelings-as, zoo besluit men hieruit, dat die raaklijn en dus ook het rakend vlak, loodregt op het meridiaan-vlak staat.

De normaal van het raakpunt, welke in dit laatste vlak ligt, zal derhalve de omwentelings-as ergens snijden.

Deze laatste eigenschap levert nu het middel op om tot de differentiaal-vergelijking van het oppervlak te geraken. Men heeft namelijk voor de vergelijkingen der normaal (§ 179)

$$x' - x + (z' - z)\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$y' - y + (z' - z)\frac{dz}{dy} = 0.$$

en stellende verder voor die der as

$$x' = az' + a', \qquad y' = bz' + b',$$

dan heeft men in het snijpunt dezer beide lijnen

$$(a + p)z' = pz + x - a',$$

$$(b + q)z' = qz + y - b',$$

dus

$$\frac{a + p}{b + q} = \frac{pz + x - a'}{qz + y - b'},$$

waaruit volgt

$$p(y - bz - b') - q(x - az - a') = b(x - a') - a(y - b') \ . \quad (7)$$

In het bijzonder geval waarin de omwentelings-as met die der z overeenstemt, als wanneer elk der vier grootheden a, b, a', b' nul wordt, herleidt zich de voorgaande vergelijking tot deze meer eenvoudige

$$py - qx = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (8)$$

§ 187. Men kan de omwentelings-vlakken ook beschouwen als voortgebragt door de beweging van een' cirkel, welks middelpunt in de as blijft, en waarvan het vlak loodregt op die as staat, mits de straal hierbij zoodanig verandere, dat de omtrek steeds eene gegevene kromme snijde. De hieruit voortvloeijende eigenschap dat elke doorsnede van het oppervlak, loodregt door de as, een cirkel is, geeft het middel aan de hand, om gemakkelijk tot eene vergelijking in eindige grootheden te geraken, welke het analytische kenmerk der omwentelings-oppervlakken uitdrukt. Een dezer snijdende vlakken heeft namelijk tot vergelijking

$$ax + by + z = m.$$

Elke parallel-cirkel kan tevens beschouwd worden als de doorsnede van dat vlak met eenen bol van eenen veranderlijken straal r, en welks middelpunt op de omwentelings-as ligt; zij dan

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - c)^2 = r^2,$$

de vergelijking van dezen bol. Verbindende nu deze en de voorgaande vergelijking met die van de projectiën der beschrijvende lijn, zal men, na eliminatie van x, y, z, eene betrekking tusschen r en m van den vorm

$$r^2 = \varphi(m),$$

overhouden, welke alzoo tot algemeene vergelijking der omwentelings-vlakken geeft,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \varphi(ax + by + z) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

waarin de vorm der functie φ, eeniglijk van den aard der gegevene beschrijvende lijn afhankelijk is.

Is de as der z de omwentelings-as, en plaatst men het middelpunt der snijdende bollen tevens in den oorsprong, dan gaat de vorige vergelijking over in

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(z), \qquad \text{of } z = f(x^2 + y^2) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Men kan nu wederom de differentiaal-betrekking (7) regtstreeks uit de zoo even gevondene vergelijking (9) afleiden.

Men vindt namelijk door deze achtervolgens ten aanzien van x en y te differentiëren,

$$2(x-\alpha) + 2p(z-\gamma) = \varphi_1(ax + by + z)(a + p),$$

$$2(y-\beta) + 2q(z-\gamma) = \varphi_1(ax + by + z)(b + q),$$

dus

$$\frac{a+p}{b+q} = \frac{x-\alpha+p(z-\gamma)}{y-\beta+q(z-\gamma)},$$

welke vergelijking, met inachtneming dat $\alpha = a\gamma + a'$ en $\beta = b\gamma + b'$ is, na herleiding bevonden zal worden met (7) volkomen overeen te stemmen.

Even zoo volgt uit de verg. (10),

$$p = 2x f_1(x^2 + y^2),$$

$$q = 2y f_1(x^2 + y^2),$$

dus

$$py - qx = 0.$$

§ 188. Passen wij de voorgaande formules toe op het onderzoek der vergelijking van het oppervlak, voortgebragt door de onwenteling eener lijn

$$x = mz + m', \qquad y = nz + n',$$

om de as der z, welke lijn hier als rigtlijn des bewegenden cirkels beschouwd wordt.

Deze vergelijkingen moeten nu gecombineerd worden met die van het vlak loodregt door de as, en die van den bol welks middelpunt in den oorsprong kan genomen worden, te weten:

$$z = a, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

of
$$x^2 + y^2 = r^2 - a^2 = k^2,$$

dus
$$(mz + m')^2 + (nz + n')^2 = k^2 = x^2 + y^2,$$

waaruit volgt

$$x^2 + y^2 - (m^2 + n^2)z^2 - 2(mm' + nn')z = m'^2 + n'^2.$$

Door hierin achtervolgens z en x of y nul te stellen, bemerkt men terstond dat het oppervlak hetzelfde is als dat, hetwelk door eene om de as der z wentelende hyperbool voortgebragt wordt, en waarvan het middelpunt op die as ligt.

Ter meerdere eenvoudigheid zou men den kortsten afstand tusschen de gegevene lijn en de as der z, tot as der x kunnen aannemen, waardoor deze lijn, die alsdan evenwijdig aan het yz-vlak loopt, tot vergelijkingen bekomt

$$x = m', \qquad y = nz,$$

en de vergelijking van het oppervlak overgaat in

$$x^2 + y^2 - n^2z^2 = m'^2 \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Het middelpunt der hyperbool ligt thans in den oorsprong; en de lijnen m', $\frac{m'}{n}$, stellen de lengten der halve eerste en tweede assen voor.

Neemt men voor de vergelijkingen der rigtlijn

$$x = m', \qquad y = -nz,$$

dan brengt zulks geene verandering te weeg in de vergelijking (a), ten blijke dat dezelfde hyperboloïde ook door twee verschillende regte lijnen, welker hellingen op het xy-vlak elkanders supplementen zijn, kan voortgebragt worden, en hieruit mag men verder besluiten, dat men door elk punt van het oppervlak eener omwentelings-hyperboloïde twee regte lijnen kan trekken, die geheel op dat vlak gelegen zijn.

De zoogenaamde *ringvormige* oppervlakken behooren insgelijks tot de omwentelings-oppervlakken, en hare vergelijkingen zullen diensvolgens ook aan eene der differentiaal-vergelijkingen (7) en (8) moeten voldoen.

ACHT EN TWINTIGSTE LES.

Over de scheve en de ontwikkelbare oppervlakken.

§ 189. Alle oppervlakken voortgebragt door eene regte lijn, bewegende langs andere vaste rigtlijnen, hetzij regte of kromme, zijn bekend onder de algemeene benaming van *regelregte* oppervlakken (*surfaces reglées*), uithoofde zij door platte vlakken, in bepaalde rigtingen steeds volgens regte lijnen kunnen doorsneden worden. Hiertoe behooren insgelijks de reeds hiervoren behandelde cilinder- en kegelvlakken, de hyperboloïde met een blad, de parabolische hyperboloïde, het schroefvlak enz.

Die oppervlakken worden echter gewoonlijk in twee hoofdsoorten verdeeld, te weten: in *scheve* (*surfaces gauches*) en in *ontwikkelbare* oppervlakken (*surfaces développables*). De eerste soort bestaat uit de zoodanige, waarbij twee naburige of opvolgende standen der beschrijvende lijn niet in hetzelfde vlak liggen, en dus elkander kruissen, zoo als bijv. in de beide hiervoren opgenoemde hyperboloïden plaats vindt. Tot de tweede soort behooren daarentegen de zoodanige oppervlakken, alwaar de rigtingen van twee opvolgende beschrijvende lijnen zich snijden of aan elkander evenwijdig loopen, en dus in hetzelfde vlak gelegen zijn, zoo als onder anderen met de kegel- en cilindervlakken het geval is. De oppervlakken van deze soort bezitten de eigenschap, dat hunne elementen begrepen tusschen twee opvolgende standen der beschrijvende lijn, tot een plat vlak naast elkander kunnen uitgespreid worden, zonder plooi of scheuring, waaruit dan ook de benaming van ontwikkelbaar oppervlak is ontstaan.

§ 190. Beschouwen wij in de eerste plaats de scheve oppervlakken. Deze worden wederom in twee bijzondere klassen onderscheiden. De beschrijvende lijn kan namelijk gedurende hare beweging op twee of op drie lijnen, het zij regte of kromme, rusten. In het eerste geval laat zich die beweging tevens aan de voorwaarde verbinden, dat de lijn steeds evenwijdig aan een bepaald vlak blijve, waardoor hare beweging volkomen bepaald is. Neemt men eene

regte lijn tot eene der twee rigtlijnen aan, dan verkrijgen de hierdoor voortgebragte scheve vlakken meer bepaaldelijk den naam van *conoïden*. Om de vergelijking dezer conoïdische oppervlakken zoo eenvoudig mogelijk te maken, kan men het rigtvlak, waaraan de beschrijvende lijn evenwijdig blijft, tot dat der xy, en daarbij het snijpunt van eene der rigtlijnen met het gezegde vlak, tot oorsprong der coördinaten aannemen.

Laten bijv. de kromme AB en de regte lijn OO' (*fig.* 59) de beide rigtlijnen voorstellen, en de conoïde voortgebragt worden door de beweging eener onbepaalde lijn MN, glijdende langs de genoemde rigtlijnen evenwijdig aan het xy-vlak. Is nu Mm een element der kromme AB, en brengt men door het punt m een vlak evenwijdig aan het rigtvlak, dan snijdt het de conoïde volgens eene regte lijn mn, welke met MN niet in hetzelfde vlak ligt, uithoofde de raaklijn MT, die de rigting van het element Mm aanduidt, ondersteld wordt de lijn OO' te kruissen. Slechts voor enkele bijzondere punten der kromme AB, zoude eene snijding der raaklijn met de lijn OO' kunnen plaats vinden.

Stellen wij thans voor de vergelijkingen der kromlijnige rigtlijn AB,

$$x = \varphi(z), \qquad y = \psi(z),$$

en voor die der lijn OO',

$$x = az, \qquad y = bz.$$

De beschrijvende lijn MN zal, volgens de aangenomen onderstelling, tot vergelijkingen hebben

$$y = \alpha x + \beta, \qquad z = \gamma,$$

waarin α, β, γ met elken stand dezer lijn veranderlijk zijn. Op dat deze de lijn OO' snijde, moet er tusschen de vijf grootheden a, b, α, β, γ, de navolgende betrekking plaats vinden

$$a\alpha\gamma + \beta = b\gamma, \qquad \text{of } \beta = (b - a\alpha)\gamma,$$

waardoor de vergelijkingen der beschrijvende lijn overgaan in

$$y - b\gamma = \alpha(x - a\gamma), \quad z = \gamma.$$

De coördinaten der kromme AB moeten nu tevens aan deze beide laatste vergelijkingen voldoen. Hierdoor bekomt men

$$\psi(\gamma) - b\gamma = \alpha(\varphi(\gamma) - a\gamma),$$

waaruit vervolgens eene bepaalde betrekking tusschen de veranderlijken α en γ, van den vorm

$$\gamma = f(\alpha),$$

afgeleid wordt, zoo dat de vergelijking der conoïden kan voorgesteld worden onder den algemeenen vorm

$$z = f\left(\frac{y-bz}{x-az}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zijnde de functie f eeniglijk afhankelijk van den aard der kromme AB.

De partiële differentiaal-vergelijking dezer oppervlakken laat zich gemakkelijk aldus vinden.

Dewijl de lijn NM geheel in het rakend vlak van het punt M ligt, moet de vergelijking van dat vlak

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

ook gelden voor alle waarden van $z' = z$; zij gaat alsdan over in

$$p(x' - x) + q(y' - y) = 0.$$

Wijders, daar de rigtlijn OO' tevens het rakend vlak snijdt, behooren de coördinaten x', y', z' van dat snijpunt zoo wel aan de voorgaande als aan de vergelijkingen

$$x' = az', \qquad y' = bz',$$

te voldoen. Diensvolgens bekomt men voor de begeerde differentiaal-vergelijking

$$p(x - az) + q(y - bz) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welke ook regtstreeks uit de vergel. (1) had kunnen afgeleid worden. Immers, door deze laatste onder den vorm

$$y - bz = (x - az)\,\varphi(z),$$

te schrijven, en achtervolgens ten opzigte van x en y te differentiëren, komt er,

$$-bp = p(x - az)\,\varphi_1(z) + (1 - ap)\,\varphi(z),$$
$$1 - bq = q(x - az)\,\varphi_1(z) - aq\,\varphi(z).$$

De eerste met q en de tweede met p vermenigvuldigende, en de producten vervolgens van elkander aftrekkende, vindt men de betrekking

$$p + q\,\varphi(z) = 0,$$

welke, na substitutie van $\frac{y-bz}{x-az}$ voor $\varphi(z)$, wederom de vergel. (2) oplevert.

§ 191. In het bijzonder geval, waarin de rigtlijn OO' met de as der z overeenstemt, en dus loodregt op het rigtvlak staat, wordt het oppervlak eene regte conoïde genaamd. De coëfficiënten a en b worden hierbij nul, en de vergelijkingen (1) (2) herleiden zich als dan tot

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

en

$$px + qy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Tot deze soort conoïden behoort onder anderen het oppervlak bekend onder den naam van *kegelvormige wig van* WALLIS. De kromlijnige rigtlijn is hier een cirkel-omtrek, waarvan het vlak evenwijdig aan het yz-vlak, en welks middelpunt op de as der x gelegen is. Stellen wij echter eene ellips in de plaats des cirkels, en nemen wij hierbij hare assen evenwijdig aan die der y en z gerigt, dan kan men tot de vergelijking dezer conoïde aldus geraken. Laten de vergelijkingen der ellips zijn,

$$x = a, \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

en die der beschrijvende lijn,

$$y = \alpha x, \qquad z = \gamma,$$

dan vindt men, na het verdrijven van x, y, z, voor de betrekking tusschen α en γ,

$$\frac{a^2\alpha^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1,$$

en dus voor de vergelijking van het bedoelde oppervlak

$$\frac{a^2}{b^2}\frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Men zal hieruit terstond opmaken, dat alle doorsneden van dat oppervlak met vlakken loodregt op de as der x, en dus tot vergelijking hebbende $x = m$, wederom ellipsen zijn, begrepen in de algemeene vergelijking

$$\frac{a^2y^2}{b^2m^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

en die allen dezelfde vertikale as $2c$ hebben. Eene dezer doorsneden zal in een' cirkel overgaan, indien $m = \pm\frac{ac}{b}$ genomen wordt.

Het is tevens blijkbaar, dat elke horizontale doorsnede een stelsel van twee regte lijnen oplevert, die zich in de as der z snijden, en

met het vlak der xz gelijke hoeken vormen. Bij de kegelvormige wig van WALLIS, $b = c$ zijnde, zoo vindt men voor de vergelijking van dat oppervlak

$$a^2y^2 + x^2z^2 = b^2x^2,$$

of

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2}(b^2 - z^2).$$

§ 192. Het horizontale schroefvlak kan mede onder de regte conoïden gerangschikt worden. De rigtlijnen zijn hier de vertikale as des cilinders, en de schroeflijn op dat oppervlak beschreven. Men stelle voor de vergelijkingen der schroeflijn,

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad z = \frac{h}{2\pi} B\,tg.\frac{y}{x},$$

of

$$x = r\cos.\frac{2\pi z}{h}, \qquad y = r\sin.\frac{2\pi z}{h},$$

zijnde hier r de straal des cilinders en h de hoogte van den schroefgang.

Deze vergelijkingen combinerende met die der beschrijvende lijn

$$y = ax, \qquad z = \gamma,$$

vindt men terstond,

$$a = tg.\frac{2\pi\gamma}{h}.$$

Dus

$$y = x\,tg.\frac{2\pi z}{h},$$

of

$$z = \frac{h}{2\pi} Btg.\frac{y}{x},$$

welke met eene der vergelijkingen van de schroeflijn geheel overeenkomt.

Bijaldien gevraagd wordt naar de vergelijking eener conoïde, welke om een gegeven oppervlak $U = 0$ omschreven zij, zal het er wederom slechts op aankomen de aanrakings-kromme der beide oppervlakken te bepalen. Voor alle punten dezer kromme zal nu tevens de differentiaal-betrekking

$$p(x - az) + q(y - bz) = 0,$$

moeten gelden. Derhalve zal deze kromme gegeven zijn door het stelsel vergelijkingen,

$$U = 0, \qquad (x - az)\frac{dU}{dx} + (y - bz)\frac{dU}{dy} = 0.$$

Nemen wij bijv. voor het gegeven oppervlak, de ellipsoïde

$$A(x-a)^2+By^2+Cz^2=1,$$

en laat de conoïde eene regte zijn; dan zal de aanrakings-kromme, om dat hier $a=0$ en $b=0$ is, te bepalen zijn uit de vergelijking

$$Ax(x-a)+By^2=0,$$

in verband met de voorgaande, waaruit tevens de navolgende voortvloeit

$$Cz^2-Aax+Aa^2-1=0.$$

De gezochte kromme heeft dus tot projectiën op de xy- en xz vlakken eene ellips en eene parabool. Men zal nu verder gemakkelijk de vergelijking van het omschreven conoïdische vlak kunnen bepalen.

§ 193. Gaan wij thans tot de beschouwing over van de scheve oppervlakken, voortgebragt door eene regte lijn bewegende langs twee kromlijnige rigtlijnen, en evenwijdig aan een gegeven vlak, dat wij wederom tot het xy-vlak zullen aannemen.

Stellen wij voor de vergelijkingen der rigtlijnen

$$x=\varphi(z),\qquad y=\varphi(z),\qquad x=F(z),\qquad y=f(z),$$

en voor die der beschrijvende lijn

$$y=\alpha x+\beta,\qquad z=\gamma.$$

In al de punten welke aan elke der beide rigtlijnen en de beschrijvende lijn gemeen zijn, zullen de waarden van x, y, z gelijktijdig aan vier der zes voorgaande vergelijkingen moeten voldoen.

Door nu x, y, z te elimineren tusschen elk der beide eerste stelsels vergelijkingen, en die der beschrijvende lijn, verkrijgt men achtervolgens twee verschillende betrekkingen tusschen de drie veranderlijke grootheden α, β, γ, waaruit twee andere vergelijkingen van den vorm

$$\alpha=\psi(\gamma),\qquad \beta=\psi'(\gamma),$$

kunnen afgeleid worden, welke die der gemelde lijn doen overgaan in:

$$y=x\psi(\gamma)+\psi'(\gamma),\qquad z=\gamma,$$

en hieruit vervolgens α verdrijvende, vindt men eindelijk voor deze klasse van scheve oppervlakken, eene vergelijking welke onder dezen algemeenen vorm

$$y=x\psi(z)+\psi'(z),\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

kan voorgesteld worden, en waarin ψ, ψ' twee functiën beteekenen,

die eeniglijk van den aard der rigtlijnen afhankelijk zijn. Zoo lang echter deze laatste onbepaald blijven, worden die functiën hier als geheel willekeurig aangenomen.

§ 194. Men vrage bijv. naar de vergelijking van het oppervlak, beschreven door eene horizontale lijn, bewegende langs eene ellips en een' cirkel beide in evenwijdige vertikale vlakken gelegen, en tot vergelijkingen hebbende,

$$x = a, \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$x = m, \qquad y^2 + z^2 = c^2.$$

Hierbij moeten nog gevoegd worden die der beschrijvende lijn

$$y = \alpha x + \beta, \qquad z = \gamma.$$

Om de vergelijking van het begeerde oppervlak te verkrijgen, zal men de drie grootheden α, β, γ, uit de zes voorgaande vergelijkingen hebben te verdrijven, waarbij men aldus te werk kan gaan. Door de beide laatsten met die der rigtlijnen te combineren, ontstaan er tusschen α, β, γ de navolgende betrekkingen,

$$\left(\frac{\alpha a + \beta}{b}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1,$$

$$\left(\frac{\alpha m + \beta}{c}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1,$$

waaruit terstond volgt

$$\frac{\alpha a + \beta}{b} = \pm\left(\frac{\alpha m + \beta}{c}\right),$$

dus

$$\beta = \left(\frac{ca \mp bm}{\pm b - c}\right)\alpha.$$

Deze waarde van β substituëre men in de vergelijkingen

$$y = \alpha x + \beta, \qquad \alpha m + \beta = \sqrt{c^2 - \gamma^2} = \sqrt{c^2 - z^2},$$

dan komt er

$$y = \alpha \left\{\frac{(\pm b - c)\, x + ca \mp bm}{\pm b - c}\right\},$$

$$\frac{\alpha c\,(a - m)}{\pm b - c} = \sqrt{(c^2 - z^2)}.$$

Derhalve, na eliminatie van α,

$$c\,(a - m)\, y = \left\{(\pm b - c)\, x + ca \mp bm\right\}\sqrt{(c^2 - z^2)}.$$

voor de gezochte vergelijking.

Het dubbele teeken duidt twee verschillende oppervlakken aan. Het bovenste of benedenste is toepasselijk naar dat de beschrijvende lijn de beide rigtlijnen in twee punten snijdt die aan dezelfde zijde of aan verschillende zijden van het xz vlak liggen.

Stelt men hierin $y = 0$, dan blijkt het dat het vlak der xz door het scheve oppervlak gesneden wordt volgens twee horizontale lijnen op den afstand $\pm c$, van den oorsprong, en tevens volgens eene vertikale lijn op den afstand $\frac{\pm bm - ca}{\pm b - c}$ van de as der z, zoo dat het oppervlak ook voortgebragt kan worden door deze vertikale lijn en de ellips tot rigtlijnen aan te nemen, en dus hetzelfde conoïdische vlak is, hetwelk reeds in § 191 behandeld is. De gezegde lijn stelt hier de vertikale as der conoïde voor.

§ 195. Men kan voor de scheve oppervlakken, even als bij de conoïdische, eene partiëlė differentiaal-vergelijking bekomen, welke van den vorm der bedoelde functiën geheel onafhankelijk zij.

Te dien einde zal men, uit hoofde van het aanwezig zijn der twee willekeurige functiën ψ, ψ', minstens twee achtervolgende differentiatiën der vergel. (4) ten opzigte van elke der onafhankelijke veranderlijken x, y te verrigten hebben. Men vindt diensvolgens

$$0 = \varphi(z) + px\varphi_1(z) + p\psi_1(z),$$
$$1 = qx\varphi_1(z) + q\psi_1(z),$$

waaruit door deeling terstond volgt,

$$\frac{p}{q} = -\varphi(z) \quad \text{of} \quad p + q\varphi(z) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Er blijft dus nog overig de functie φ te elimineren. Stellende nu ter bekorting,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} = r, \qquad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = \frac{d^2z}{dxdy} = s,$$
$$\frac{dq}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

dan geeft de vergel. (5), beurtelings ten opzigte van x en y gedifferentiëerd,

$$r + s\varphi(z) + pq\varphi_1(z) = 0,$$
$$s + t\varphi(z) + q^2\varphi_1(z) = 0,$$

waaruit, na substitutie van $-\frac{p}{q}$ voor $\varphi(z)$, en deeling, volgt

$$\frac{qr - ps}{qs - pt} = \frac{p}{q}.$$

Derhalve komt er

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

voor de algemeene differentiaal-vergelijking der scheve oppervlakken met twee rigtlijnen van willekeurigen vorm.

§ 196. Tot de voorgaande vergelijking kan men ook regtstreeks aldus geraken.

Men beschouwe namelijk twee rakende vlakken gaande door twee oneindig digt bij elkander gelegen punten eener beschrijvende lijn, dan zullen die beide vlakken zich volgens die lijn moeten snijden. Differentiërende nu de vergelijking van het rakend vlak

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

ten opzigte van x, y, z, en hierbij acht gevende, dat $pdx + qdy = dz$, komt er

$$(x' - x)\,dp + (y' - y)\,dq = 0,$$

en daar $z' = z$ tevens aan de vergelijking (7) voldoet, heeft men daarenboven

$$p(x' - x) + q(y' - y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

waaruit volgt

$$\frac{p}{q} = \frac{dp}{dq} = \frac{r\,dx + s\,dy}{s\,dx + t\,dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

De verg. (8) is die der horizontale projectie van de beschrijvende lijn, en door hierin $x' = x + dx$, $y' = y + dy$ te stellen, geeft zij

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q},$$

waardoor (9) verandert in

$$\frac{p}{q} = \frac{qr - ps}{qs - pt},$$

of

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0,$$

even als in § 195 langs eenen anderen weg gevonden is.

Men zoude hierbij ook van de navolgende redeneerwijze hebben kunnen gebruik maken.

De differentiaal-vergelijking

$$dz = pdx + qdy,$$

toegepast op de punten der beschrijvende lijn, voor welke z standvastig is, geeft

$$0 = pdx + qdy,$$

en aangezien voor elk dezer punten de verhouding $\frac{dx}{dy}$ tevens standvastig is, zal men door de vorige vergelijking, eeniglijk ten aanzien van p en q te differentiëren, terstond bekomen

$$0 = dp\,dx + dq\,dy.$$

Eliminerende vervolgens dx en dy tusschen deze en de voorgaande vergelijking, zal men de vorige uitkomst op nieuw te voorschijn zien treden.

§ 197. De scheve oppervlakken, welke ons nog ter beschouwing overig blijven en tot de tweede klasse behooren, zijn die, waarbij de beschrijvende lijn steeds op drie in stelling gegevene kromme lijnen rust. Het valt in de eerste plaats niet moeijelijk aan te toonen, dat die lijn hierdoor in hare beweging volkomen bepaald is. Immers neemt men op de eerste kromme een willekeurig punt tot toppunt van twee kegelvlakken aan, welke de beide andere krommen tot rigtlijnen hebben, dan zullen die beide kegelvlakken elkander volgens eene of meer regte lijnen snijden, die klaarblijkelijk op de drie krommen gelijktijdig zullen rusten, en zulks geldt eveneens ten aanzien van elk ander punt, op de eerste kromme gelegen.

Laat nu de beschrijvende lijn tot vergelijkingen hebben

$$x = \alpha z + \gamma, \qquad y = \beta z + \delta,$$

dan zal men uit de combinatie dezer vergelijkingen met die der gegevene krommen, drie verschillende betrekkingen tusschen α, β, γ, δ afleiden, welke tot deze vormen kunnen herleid worden

$$\beta = \varphi(\alpha), \qquad \gamma = \psi(\alpha), \qquad \delta = \chi(\alpha),$$

en hierdoor gaan de beide voorgaande vergelijkingen over in

$$x = \alpha z + \psi(\alpha), \qquad y = z\varphi(\alpha) + \chi(\alpha),$$

waarin nog slechts overig blijft de grootheid α te elimineren, hetgeen hier niet mogelijk is, zoo lang de vorm der daarin voorkomende functiën onbekend blijft. Het is uit dien hoofde noodzakelijk dat stelsel van twee vergelijkingen te behouden, om ook deze soort van scheve oppervlakken op eene algemeene wijze voor te stellen.

Even als bij de vorige klassen van scheve oppervlakken, kan men ook hier, langs twee verschillende wegen, tot eene partiële differentiaal-vergelijking geraken. Daar zij echter tot de derde orde opklimt en eenen vrij zamengestelden vorm verkrijgt, zullen wij de mededeeling daarvan achterwege laten. Men zal met weinig

moeite vinden, dat zij ontstaat uit het elimineren van dx en dy tusschen de differentiaal vergelijkingen

$$dp\,dx + dq\,dy = 0,$$
$$d^2p\,dx + d^2q\,dy = 0.$$

§ 198. *Ontwikkelbare oppervlakken.* Zoo als reeds vroeger (§ 189) vermeld is, heeft de beschrijvende bij deze soort oppervlakken eeniglijk aan de voorwaarde voldaan, dat twee van hare opvolgende standen steeds in hetzelfde vlak liggen. Voor elk willekeurig punt M tot de eene rigtlijn behoorende, moet het overeenkomstige punt M' op de andere in dier voege genomen worden, dat de raaklijnen aan die twee punten zich snijden, of aan elkander evenwijdig loopen, waardoor dan ook de stelling der beschrijvende lijn volkomen bepaald is.

Daar nu de beschrijvende lijnen door hare onderlinge snijding de keerlijn van het oppervlak vormen, en aan deze steeds rakende zijn, kan elk ontwikkelbaar oppervlak ook beschouwd worden als de meetkunstige plaats eener lijn, die in hare beweging aan eene gegevene lijn van dubbele kromming rakend blijve. Zijn nu

$$x = F(z), \qquad y = f(z),$$

de vergelijkingen dezer kromme lijn, dan zal de raaklijn in eenig punt alwaar $z = a$ is, tot vergelijkingen hebben

$$\left.\begin{array}{l} x - F(a) = F_1(a)\,(z - a) \\ y - f(a) = f_1(a)\,(z - a) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

De meetkunstige plaats van al deze raaklijnen zal derhalve verkregen worden door a uit de beide vergelijkingen te verdrijven, hetgeen evenwel niet doenlijk is, zoo lang de functiën F, f geenen bekenden vorm hebben. De algemeene vergelijking der ontwikkelbare oppervlakken is derhalve in het voorgaande stelsel vergelijkingen opgesloten, in eene van welke a als eene functie van x en y uit de andere af te leiden, mag beschouwd worden.

§ 199. Maken wij hiervan eene toepassing op het bepalen van het oppervlak ontstaande uit de beweging eener lijn, die steeds raaklijn zij aan eene gegevene schroeflijn, en hetwelk bekend is onder de benaming van ontwikkelbaar schroefvlak (*Heliçoïde développable*).

Stellen wij voor de vergelijkingen der gemelde kromme

$$x = r\cos.\left(\frac{2\pi z}{h}\right), \qquad y = r\sin.\left(\frac{2\pi z}{h}\right),$$

zijnde hierin r de straal des cilinders, waarop de schroeflijn beschreven is, en h de hoogte van den schroefgang.

De vergelijkingen der veranderlijke raaklijn zijn thans

$$x - r\cos.\left(\frac{2\pi a}{h}\right) = -\frac{2\pi r}{h}\sin.\left(\frac{2\pi a}{h}\right)(z-a),$$

$$y - r\sin.\left(\frac{2\pi a}{h}\right) = +\frac{2\pi r}{h}\cos.\left(\frac{2\pi a}{h}\right)(z-a).$$

Hieruit volgt terstond

$$x\cos.\left(\frac{2\pi a}{h}\right) + y\left(\sin.\frac{2\pi a}{h}\right) = r \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

Door de beide eerste vergelijkingen in het vierkant te brengen, en vervolgens bij elkander op te tellen, vindt men, met inachtneming der voorgaande betrekking,

$$x^2 + y^2 - r^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{h^2}(z-a)^2,$$

en wijders

$$\frac{2\pi a}{h} = \frac{2\pi z}{h} \pm \frac{1}{r}\sqrt{(x^2+y^2-r^2)},$$

zoodat (α) thans overgaat in

$$x\cos.\left\{\frac{2\pi z}{h} \pm \frac{\sqrt{(x^2+y^2-r^2)}}{r}\right\} + y\sin.\left\{\frac{2\pi z}{h} \pm \frac{\sqrt{(x^2+y^2-r)}}{r}\right\} = r \quad (\beta)$$

hetwelk de vergelijking van het bedoelde schroefvlak voorstelt.

Men kan die vergelijking tevens onder eenen anderen vorm brengen, waardoor z regtstreeks in functie van x en y uitgedrukt wordt.

Uit de vergelijkingen der raaklijn laat zich namelijk nog de volgende afleiden.

$$y\cos.\left(\frac{2\pi a}{h}\right) - x\sin.\left(\frac{2\pi a}{h}\right) = \sqrt{(x^2+y^2-r^2)},$$

welke, door (α) gedeeld, geeft

$$\frac{y - x\,tg.\left(\frac{2\pi a}{h}\right)}{x + y\,tg.\left(\frac{2\pi a}{h}\right)} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2-r)}}{r},$$

en waaruit verder volgt

$$tg.\left(\frac{2\pi a}{h}\right) = \frac{ry - x\sqrt{(x^2+y^2-r^2)}}{rx + y\sqrt{(x^2+y^2-r^2)}} = \frac{xy - r\sqrt{(x^2+y^2-r^2)}}{r^2 - y^2},$$

en hierin voor a zijne waarde in x, y, z schrijvende, komt er

$$\frac{2\pi r z}{h} \pm \sqrt{(x^2 - y^2 - r)} = r\, B\, tg. \frac{xy - r\sqrt{(x^2+y^2-r^2)}}{r^2 - y^2}.$$

Door in (β) $z = 0$ te stellen, vindt men voor de doorsnede van het schroefvlak met het xy-vlak, eene kromme tot vergelijking hebbende

$$x \cos. \frac{\sqrt{(x^2+y^2-r^2)}}{r} \pm y \sin. \frac{\sqrt{(x^2+y^2-r^2)}}{r} = r,$$

en welke de ontwindende van den cirkel aantoont.

§ 200. Uit het stelsel vergelijkingen (10) laat zich de partiële differentiaal-vergelijking afleiden die voor alle ontwikkelbare oppervlakken, onafhankelijk van den aard der rigtlijnen, of van den vorm der willekeurige functiën f, F, geldig is. Te dien einde beschouwe men a als eene functie van x en y, dan geeft de eerste der aangehaalde vergelijkingen, na differentiatie ten opzigte van x en y afzonderlijk,

$$1 - F_1(a)\frac{da}{dx} = F_1(a)\left(p - \frac{da}{dx}\right) + (z - a)\, F_2(a)\frac{da}{dx},$$

$$- F_1(a)\frac{da}{dy} = F_1(a)\left(q - \frac{da}{dy}\right) + (z - a)\, F_2(a)\frac{da}{dy},$$

of wel

$$1 - p\, F_1(a) = (z - a)\, F_2(a)\frac{da}{dx},$$

$$- q\, F_1(a) = (z - a)\, F_2(a)\frac{da}{dy}.$$

Op gelijke wijze geeft de andere vergelijking,

$$- p\, f_1(a) = (z - a)\, f_2(a)\frac{da}{dx},$$

$$1 - q\, f_1(a) = (z - a)\, f_2(a)\frac{da}{dy},$$

waaruit men verder door deeling terstond vindt,

$$\frac{pF_1(a) - 1}{p\, f_1(a)} = \frac{F_2(a)}{f_2(a)},$$

$$\frac{q\, f_1(a) - 1}{q\, F_1(a)} = \frac{f_2(a)}{F_2(a)},$$

welke beide vergelijkingen vatbaar zijn ook onder dezen vorm voorgesteld te worden

$$p = \varphi(a), \qquad q = \psi(a),$$

zoodat p en q elk in het bijzonder als eene functie van a te beschouwen zijn, waaruit verder volgt

$$p = \chi(q),$$

en deze is nu de partiële differentiaal-vergelijking der eerste orde voor alle soort van ontwikkelbare oppervlakken. Om echter hieruit tevens de willekeurige functie F te verdrijven, zal men die vergelijking op nieuw ten opzigte van x en y behooren te differentiëren, als wanneer men verkrijgt

$$\frac{dp}{dx} = r = s\chi_1(q), \qquad \frac{dp}{dy} = s = t\chi_1(q).$$

Derhalve $$s^2 - rt = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

voor de begeerde vergelijking.

Vrij spoediger kan men echter tot diezelfde differentiaal-betrekking geraken, met behulp der bijzondere eigenschap welke het rakend vlak aan eenig punt bezit, van namelijk dezelfde stelling te behouden voor alle overige punten op dezelfde beschrijvende lijn gelegen. In de vergelijking van het rakend vlak

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

moeten dus de coördinaten x, y, z, zoodanige oneindig kleine veranderingen kunnen ondergaan, dat p, q, $z - px - qy$ hierdoor onveranderd blijven, en aangezien $dz = pdx + qdy$ is, zal het voldoende zijn dat $dp = 0$ en $dq = 0$ worde. Voor elke beschrijvende lijn zal derhalve de verhouding $\frac{dy}{dx}$, welke de rigting van hare horizontale projectie aanduidt, gelijktijdig behooren te voldoen aan de vergelijkingen

$$\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy = 0, \qquad \frac{dq}{dx}dx + \frac{dq}{dy}dy = 0,$$

dat is

$$r\,dx + s\,dy = 0, \qquad s\,dx + t\,dy = 0,$$

waaruit, na eliminatie van $\frac{dy}{dx}$, onmiddelijk voortvloeit

$$s^2 - rt = 0.$$

De cilinder- en kegelvlakken insgelijks tot de ontwikkelbare

oppervlakken behoorende, zoo moeten hare differentiaal-vergelijkingen mede aan de hiervoren gevondene voldoen.

Voor de cilindervlakken is volgens § 182,

$$ap + bq = 1.$$

Deze vergelijking achtervolgens ten opzigte van x en y differentiërende, komt er

$$ar + bs = 0, \qquad as + bt = 0,$$

dus

$$s^2 - rt = 0.$$

Voor de kegelvlakken heeft men (§ 185)

$$z - c = p(x - a) + q(y - b),$$

en na twee differentiatiën, komt er

$$r(x - a) + s(y - b) = 0,$$

$$s(x - a) + t(y - b) = 0,$$

waaruit wederom volgt

$$s^2 - rt = 0.$$

In de volgende les zullen wij gelegenheid hebben de ontwikkelbare oppervlakken nog uit een ander oogpunt te leeren beschouwen.

NEGEN EN TWINTIGSTE LES.

Over de omhullende of omsluitende oppervlakken.

§ 201. De leer der omhullende oppervlakken berust op hetzelfde begrip als die der omhullende krommen, welke wij reeds in de *XVIIe Les* behandeld hebben. Zij namelijk

$$U = f(x, y, z, a) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

de vergelijking van eenig gebogen oppervlak, waarin a eene willekeurige standvastige voorstelt. Laat men deze naar eene bepaalde wet veranderen, dan zal ook hierdoor het oppervlak zelve van stand en soms van afmetingen veranderen, doch steeds tot dezelfde soort behooren. Al deze oppervlakken zullen elkander in hare opvolgende toestanden volgens zekere krommen doorsnijden, en de meetkunstige plaats dezer krommen zal een nieuw oppervlak opleveren binnen hetwelk al de veranderende oppervlakken zullen besloten blijven, en dat uit dien hoofde den naam van *omhullend* of *omsluitend* oppervlak draagt.

Door a met oneindig kleine verschillen te doen aangroeijen, en de vergel. (1) alzoo ten opzigte van a te differentiëren, verkrijgt men eene nieuwe betrekking tusschen x, y, z, a, van den vorm

$$\frac{dU}{da} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

en waaruit, in verband met de oorspronkelijke vergel. (1), voor elke bepaalde waarde van a, de projectiën der doorsnijdings-kromme op twee coördinaten-vlakken kunnen afgeleid worden.

Elimineert men nu a tusschen (1) en (2), dan zal de daaruit voortvloeijende betrekking tusschen x, y, z voor al deze krommen gelden, en alzoo de vergelijking van het omsluitende oppervlak voorstellen, welk laatste tevens de eigenschap bezit van al de oppervlakken die in de vergel. (1) bevat zijn, volgens de doorsnijdings-krommen te raken. Immers, beschouwen wij drie dezer opvolgende oppervlakken A_1, A, A', welke met $a - da$, a en $a + da$ overeenstemmen, dan zal A door hare naburige oppervlakken A_1, A' volgens twee oneindig digt bij elkander gelegen krommen door-

sneden worden, die beide op het omhullende oppervlak gelegen zijn, zoo dat dit laatste met het oppervlak A gemeen zal hebben de oneindig smalle strook tusschen die beide kromme lijnen begrepen, waaruit dus onmiddelijk tot de raking van beide oppervlakken mag besloten worden.

§ 202. Om de voorgaande theorie op een zeer eenvoudig voorbeeld van toepassing te maken, nemen wij hiertoe de vergelijking

$$(x-a)^2+y^2+z^2=r^2,$$

voorstellende al de bollen van gelijken straal, welker middelpunten op de as der x gelegen zijn.

De vergel. (2) wordt thans

$$x-a=0 \quad \text{of} \quad a=x,$$

en dus die van het gezochte oppervlak

$$y^2+z^2=r^2,$$

ten blijke dat al de elkander opvolgende bollen, zoo als ligt in te zien was, omsloten worden door een cilindervlak, welks as met die der x overeenstemt en met elk der bollen gelijken straal heeft.

Indien de verplaatsing der middelpunten tevens met eene verandering van de grootte der stralen gepaard gaat, afhankelijk van die welke de afstand a ondergaat, zoo dat bijv. de waarde van r overeenkomt met de ordinaat behoorende tot de abscis a in eene ellips, gelegen in het xz-vlak en tot vergelijking hebbende

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}=1,$$

dan zullen de veranderlijke bollen allen begrepen zijn in de vergelijking

$$(x-a)^2+y^2+z^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2-a^2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Deze ten aanzien van den veranderlijken parameter a gedifferentieerd, geeft

$$x-a=\frac{\beta^2}{\alpha^2}a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waaruit men voor de doorsnijdings-kromme van twee opvolgende bollen, het middelpunt op den afstand a uit den oorsprong verwijderd zijnde, vindt

$$y^2+z^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left\{\alpha^2-\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2}a^2\right\},$$

hetwelk de vergelijking is van een' kleinen cirkel des bols gelegen in een vlak loodregt op de as der x. Voor alle waarden van $a > \pm \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ bestaat er geene snijding meer, zoo dat het omhullende oppervlak binnen bepaalde grenzen besloten is. Door het elimineren van a tusschen (3) en (4), vindt men dan ook voor de vergelijking van dat oppervlak,

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{y^2+z^2}{\beta^2} = 1;$$

aantoonende eene ellipsoïde, welke om de as der x wentelt, en tot halve assen hebbende $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$ en β.

§ 203. Het zoo even behandelde problema behoort tot het meer algemeene geval, waarin de vergelijking $U=0$ twee veranderlijke doch van elkander afhankelijke parameters in zich bevat, zoo dat een hunner als functie van den anderen te beschouwen is, en dus naar eene bepaalde wet verandert. De vergelijking van het gegeven oppervlak laat zich alsdan onder dezen vorm schrijven,

$$U = F(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

en voor hare afgeleide ten opzigte van a, heeft men

$$\frac{dU}{da} + \frac{dU}{d\varphi}\varphi_1(a) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

welk stelsel vergelijkingen nu moet dienen, om voor elke willekeurige waarde van a, de projectiën te bepalen der doorsnijdingskromme, volgens welke de raking van het omsluitende oppervlak met de verschillende in de vergelijking $U = 0$ begrepen oppervlakken, plaats heeft. Voor elke verandering in den vorm der functie φ, zal de vergelijking in x, y, z, ontstaande uit het verdrijven van a, ook van gedaante veranderen, en dus omsluitende oppervlakken van *verschillende soorten* doen kennen. De omgesloten oppervlakken blijven echter tot *dezelfde soort* behooren, zoo lang de functie F niet verandert, en daar zulks met de doorsnijdingskromme als dan evenzeer het geval moet zijn, volgt hieruit, dat deze kromme den aard of het bijzondere karakter van het omsluitende oppervlak, onafhankelijk van den vorm der functie φ, bepaalt. Op dien grond heeft zij, volgens den beroemden MONGE, de benaming van *karakteristiek* van het omhullende oppervlak verkregen.

Een enkel voorbeeld zal de juistheid van die benaming nader kunnen toelichten.

Men onderstelle eene reeks bollen van gelijken straal r, welker middelpunten allen gelegen zijn in het xy-vlak, en wel op den omtrek eener kromme $y = \varphi(x)$. De vergelijkingen

$$(x-a)^2 + (y-\varphi(a))^2 + z^2 = r^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$x - a + (y-\varphi(a))\,\varphi_1(a) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

zullen in dit geval de projectiën der karakteristiek doen kennen. De vergel. (8) is die van een vlak, gaande door het middelpunt van een der bollen, en normaal op de kromme $y = \varphi(x)$. Hieruit blijkt alzoo, dat de karakteristiek steeds een groote cirkel des bols zal zijn, welke ook de aard der kromme zij, waarop het middelpunt des bols zich beweegt. Het omsluitende oppervlak kan derhalve beschouwd worden als voortgebragt door een' cirkel van standvastigen straal, welks middelpunt den omtrek eener gegevene kromme doorloopt, en waarvan het vlak steeds normaal op die kromme gerigt is. Deze soort van oppervlakken dragen de benaming van *cirkelvormige kanalen* met kromlijnige assen.

Neemt men voor deze as een' cirkel van den straal a, dan wordt

$$\varphi(a) = \sqrt{(a^2 - a^2)}, \qquad \varphi_1(a) = \frac{-a}{\sqrt{(a^2-a^2)}}.$$

De vergelijkingen (7) en (8) gaan thans over in

$$(x-a)^2 + (y - \sqrt{(a^2-a^2)})^2 + z^2 = r^2,$$

$$ay - x\sqrt{(a^2 - a^2)} = 0,$$

of
$$a = \frac{ax}{\sqrt{(x^2+y^2)}}, \qquad \sqrt{(a^2-a^2)} = \frac{ay}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

waaruit vervolgens voor de vergelijking van het omhullende vlak gemakkelijk gevonden wordt

$$\sqrt{(r^2 - z^2)} = \sqrt{(x^2+y^2)} - a.$$

§ 204. Keeren wij tot het algemeene geval terug, waarin elke karakteristieke kromme bepaald wordt met behulp der vergelijkingen

$$U = 0, \qquad \frac{U}{da} = 0,$$

en beschouwen wij twee dezer opvolgende krommen, overeenkomende met de parameters a en $a + da$, dan zullen zij zich beide in het algemeen, op het omsluitende oppervlak in een of meer punten snijden. De meetkunstige plaats dezer snijpunten vormt op dat oppervlak eene nieuwe kromme, welke zijne *keerlijn* genaamd

wordt, en het is gemakkelijk in te zien, dat deze bepaald zal worden, door het elimineren van den parameter a uit de drie vergelijkingen

$$U = 0, \quad \frac{dU}{da} = 0, \quad \frac{d^2U}{da^2} = 0.$$

Men verkrijgt als dan twee vergelijkingen tusschen twee der veranderlijken x, y, z, welke de projectiën der keerlijn op twee coördinaten-vlakken zullen aanduiden. Blijkbaar zal die kromme door al de karakteristieken geraakt worden, even als het omhullende oppervlak door al de omgesloten oppervlakken.

In het voorgaande voorbeeld zou men hebben

$$\frac{d^2U}{da^2} = y\sqrt{(a^2 - a^2)} + ax = 0,$$

welke vergelijking, gecombineerd met

$$\frac{dU}{da} = ay - x\sqrt{(a^2 - a^2)} = 0,$$

geeft $$x = 0, \quad y = 0,$$
en dus $$z = \pm\sqrt{(r^2 - a^2)},$$
waaruit blijkt, dat zoolang $r < a$ genomen wordt, het omhullende oppervlak geene keerlijn bezit, en dat voor $r > a$, die lijn zich herleidt tot twee punten, gelegen in de as der z, op de afstanden $\pm\sqrt{(r^2 - a^2)}$ uit den oorsprong, hetgeen uit den aard van het oppervlak gemakkelijk af te leiden is, dewijl al de normale cirkelomtrekken zich als dan in die beide punten moeten snijden.

Daar waar al de karakteristieke krommen in evenwijdige vlakken gelegen zijn, zoo als in het geval dat de functie φ eene regte lijn aanduidt, plaats vindt, kan er evenmin op het omhullende oppervlak eene keerlijn ontstaan.

§ 205. Verbeelden wij ons thans een plat vlak, tot vergelijking hebbende

$$z = ax + by + c,$$

hetwelk, naar eene bepaalde wet, in de ruimte wordt bewogen, en beschouwen wij daarbij de grootheden b, c, als bepaalde functiën van den veranderlijken parameter a.

De verschillende regte lijnen, volgens welke de opvolgende vlakken zich snijden, zijn hier de karakteristieken, die tevens raaklijnen aan het omhullende oppervlak worden, en aangezien twee dezer opvolgende lijnen steeds in hetzelfde vlak liggen, blijkt hieruit terstond, dat het omhullende oppervlak tot de ontwikkelbare zal behooren.

Elk ontwikkelbaar oppervlak kan derhalve beschouwd worden als het omsluitende oppervlak van een plat vlak, dat zich volgens eene bepaalde wet beweegt, en zijne vergelijking zal verkregen worden door het elimineren van a uit de beide vergelijkingen

$$z = ax + y\varphi(a) + \psi(a), \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$0 = x + y\varphi_1(a) + \psi_1(a), \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

terwijl ter bepaling der keerlijn daarenboven gevorderd wordt de vergelijking

$$0 = y\varphi_2(a) + \psi_2(a). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Uit dat stelsel vergelijkingen laten zich nu, voor elke bijzondere waarde van a, de coördinaten x, y, z van het overeenkomstige punt der keerlijn bepalen.

De vergel. (10) is die van een vlak, loodregt op dat der xy, en gaande door eene der karakteristieken. Uit de combinatie met hare afgeleide (11), verkrijgt men de vergelijking van een ander ontwikkelbaar oppervlak van cilindrischen vorm, en waarop tevens de keerlijn gelegen is. Deze laatste ontstaat dus ook uit de snijding van beide ontwikkelbare oppervlakken.

Zoo lang de vorm der willekeurige functie φ onbepaald blijft, kan uit het stelsel (9) (10) geene vergelijking, die van a bevrijd zij, afgeleid worden. Men zal dat stelsel echter altijd kunnen gebruiken, om de ontwikkelbare oppervlakken op eene algemeene wijze voor te stellen, mits den parameter a in (9) beschouwende als eene functie van x en y door (10) gegeven; en hieruit moet tevens de reeds in de voorgaande les gevondene differentiaal-vergelijking der gemelde oppervlakken op nieuw kunnen opgemaakt worden. Uit (9) volgt namelijk

$$p = a + x\frac{da}{dx} + y\varphi_1(a)\frac{da}{dx} + \psi_1(a)\frac{da}{dx},$$

$$q = x\frac{da}{dy} + \varphi(a) + y\varphi_1(a)\frac{da}{dy} + \psi_1(a)\frac{da}{dy},$$

welke vergelijkingen echter, op grond der betrekking (10), zich herleiden tot

$$p = a, \qquad q = \varphi(a),$$

dus

$$q = \varphi(p),$$

waaruit vervolgens de bedoelde differentiaal vergelijking, even als in § 200, wordt afgeleid.

§ 206. Laat men het vlak in dier voege bewegen, dat het steeds rakend zij aan een vertikaal cilindervlak, welks rigtlijn in het horizontale vlak ligt, dan zal men zich, op gelijke wijze als in § 133, kunnen verzekeren, dat het omsluitende vlak het cilindervlak zelve is, en elke der karakteristieken met eene beschrijvende lijn overeenstemt. Uit hoofde van den evenwijdigen stand dezer lijnen, bestaat er voor dat oppervlak geene keerlijn.

Onderstellen wij nog, dat het vlak in zijne beweging normaal blijve op eene lijn van dubbele kromming, gegeven door hare twee vergelijkingen

$$x = \varphi(z), \qquad y = \psi(z).$$

Zijn nu a, b, c de coördinaten van het punt dezer kromme, waardoor het bewegende vlak gebragt is, dan heeft men voor zijne vergelijking (§ 165),

$$z - c + (y - b)\frac{db}{dc} + (x - a)\frac{da}{dc} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

zijnde hierin $a = \varphi(c)$ en $b = \psi(c)$, en dus c de veranderlijke parameter.

De voorgaande vergelijking ten opzigte van c differentiërende, komt er

$$(y - b)\frac{d^2b}{dc^2} + (x - a)\frac{d^2a}{dc^2} - \left(\frac{da^2 + db^2 + dc^2}{dc^2}\right) = 0. \quad . \quad . \quad (13)$$

Het verdrijven van a, b, c uit (12) en (13) moet blijkbaar dezelfde betrekking tusschen x, y, z opleveren, welke men, met behulp der vergelijkingen (α) en (β) van § 170, voor de vergelijking van het polaire vlak verkrijgt, zoo dat dit laatste niets anders is dan het omsluitende oppervlak van de opvolgende normale vlakken eener kromme, en hierbij zal elke karakteristiek met eene poollijn overeenkomen.

De vergel. (13) is die der horizontale projectie van eene dezer lijnen. Brengt men door het punt (a, b, c) der kromme eene daaraan evenwijdige lijn, dan heeft hare horizontale projectie tot vergelijking

$$(y - b)\frac{d^2b}{dc^2} + (x - a)\frac{d^2a}{dc^2} = 0,$$

of

$$(y - b)\,d^2b + (x - a)\,d^2a = 0,$$

en deze met (12) combinerende, vindt men voor de projectie der bedoelde lijn op het xz-vlak,

$$(z - c)\, dcd^2b + (x - a)\,(dad^2b - dbd^2a) = 0.$$

Nu is, volgens § 166, de vergelijking van het krommings-vlak behoorende tot het punt a, b, c, met in achtneming, dat dc hier standvastig is aangenomen,

$$dcd^2b\,(x - a) - dcd^2a\,(y - b) - (dad^2b - dbd^2a)\,(z - c) = 0.$$

Elke poollijn staat alzoo loodregt op het krommings-vlak en dus ook loodregt op den kromtestraal van het gemelde punt, zoo als zulks reeds in § 170 is opgemerkt geworden.

DERTIGSTE LES.

Over de kromming der gebogene oppervlakken.

§ 207. Bij de verschillende lijnen van enkele of dubbele kromming, laat zich de kromte, welke zij in elk van hare punten vertoonen, vergelijken bij die eens cirkels, hebbende met de kromme eene raking van de tweede orde. Voor de gebogene oppervlakken echter kan de kromming in elk gegeven punt niet bij die eens rakenden bols vergeleken worden, en wel uithoofde dat oppervlak overal eene gelijke kromming bezit, terwijl bij een willekeurig gebogen vlak, elke doorsnede, door eenig punt gebragt, eene verschillende kromming in dat punt oplevert. Er bestaan echter tusschen de kromte-stralen der normale doorsneden van hetzelfde punt eenvoudige en opmerkelijke betrekkingen, welke wij thans zullen doen kennen.

Zij de kromme AMB (*fig.* 60) eene normale doorsnede door het punt M van eenig gebogen oppervlak gebragt, en MN de tot dat punt behoorende normaal. Onderstellen wij nu twee normaal-vlakken, gaande door de twee oneindig digt bij elkander gelegen punten M, M' dezer kromme, en zich snijdende volgens de poollijn OO', dan is het klaar, dat het punt O, waarin deze lijn het vlak AMB en dus ook de normaal MN snijdt, het middelpunt des kromte-cirkels, en MO den kromte-straal van het punt M der doorsnede AMB zal voorstellen.

Het normaal-vlak, gaande door het punt M, welks coördinaten x, y, z zijn, heeft tot vergelijking (§ 165)

$$(x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Door hierin x, y, z met hunne differentialen te doen aangroeijen, verkrijgt men de vergelijking van het naburige normaal-vlak. De doorsnede OO' dezer beide vlakken wordt derhalve bepaald door het combineren van de voorgaande vergelijking met die, welke uit hare differentiatie ten aanzien van x, y, z voortvloeit, te weten:

$$(x'-x)\,d^2x + (y'-y)\,d^2y + (z'-z)\,d^2z = ds^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Voegt men hierbij de vergelijkingen der normaal MN, namelijk

$$x'-x+p(z'-z)=0,\quad y'-y+q(z'-z)=0 \quad . \quad . \ (3)$$

welke tevens die van het normaal vlak kunnen vervangen, uithoofde de coördinaten x, y, z aan elkander verbonden zijn door de differentiaal vergelijking des oppervlaks

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

dan zullen de waarden van x', y', z' uit (2) en (3) afgeleid, de coördinaten van het middelpunt O des kromte-cirkels doen kennen, terwijl de kromte-straal $MO=\rho$ vervolgens berekend kan worden uit de formule

$$\rho=\sqrt{\left\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right\}}.$$

Nu geven de vergelijkingen (2), (3) terstond

$$z'-z=\frac{ds^2}{d^2z-p\,d^2x-q\,d^2y},$$

$$y'-y=\frac{-q\,ds^2}{d^2z-p\,d^2x-q\,d^2y},$$

$$x'-x=\frac{-p\,ds^2}{d^2z-p\,d^2x-q\,d^2y}.$$

Derhalve

$$\rho=\frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}\,ds^2}{d^2z-p\,d^2x-q\,d^2y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (4)$$

Maar men heeft, door het differentiëren der betrekking

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

hierbij dx en dy insgelijks als veranderlijk beschouwende,

$$d^2z=p\,d^2x+q\,d^2y+dp\,dx+dq\,dy.$$

Dus

$$d^2z-p\,d^2x-q\,d^2y=dp\,dx+dq\,dy,$$

of omdat $\quad dp=r\,dx+s\,dy,$

en $\quad dq=s\,dx+t\,dy,$

zal men, na den boog s, ter voorkoming van verwarring met het differentiaal-quotient s, door s' vervangen te hebben, voor den kromte-straal ρ thans de navolgende uitdrukking verkrijgen

$$\rho=\frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}\,ds'^2}{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (5)$$

Tusschen de differentialen dx, dy, ds' bestaat daarenboven de betrekking

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + (pdx + qdy)^2,$$

of $$ds'^2 = (1+p^2)\,dx^2 + (1+q^2)\,dy^2 + 2pq\,dxdy \quad . \; . \; . \; (6)$$

Stellende nu $\frac{dy}{dx} = m$, dan laat zich de waarde van ρ ook onder dezen vorm schrijven

$$\rho = \frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}\left\{(1+p^2) + 2pqm + m^2(1+q^2)\right\}}{r + 2ms + tm^2} \quad . \; . \; (7)$$

waarin m, voor elke normale doorsnede, de rigting voorstelt van de projectie der raaklijn aan het punt (x, y, z) op het xy-vlak.

Men noeme α, β, γ de hoeken door deze raaklijn met de coördinaten-assen gevormd, dan heeft men

$$cos.\,\alpha = \frac{dx}{ds'}, \quad cos.\,\beta = \frac{dy}{ds'}, \quad cos.\,\gamma = \frac{dz}{ds'}.$$

De formule (5) gaat hierdoor over in

$$\rho = \frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{r\,cos.^2\alpha + 2s\,cos.\alpha\,cos.\beta + t\,cos.^2\beta} \quad . \; . \; . \; . \; (8)$$

waarin nu de hoeken α en β, ingevolge verg. (6), aan elkander verbonden zijn door de betrekking

$$(1+p^2)\,cos.^2\alpha + 2pq\,cos.\alpha\,cos.\beta + (1+q^2)\,cos.^2\beta = 1,$$

zoo dat een dezer hoeken voldoende is, om den stand der normale doorsnede gaande door eenig punt (x, y, z) te bepalen. De lengte des kromte-straals ρ voor dat punt, kan dus ook als eene functie van een' der hoeken α en β beschouwd worden.

§ 208. Vergelijkt men de waarde van ρ volgens form. (4), met die van $z'-z$, dan laat zich dadelijk hieruit afleiden, dat, indien men de wortel uitdrukking $\sqrt{(1+p^2+q^2)}$ steeds als positief in rekening brengt, het verschil $z'-z$ hetzelfde teeken als ρ verkrijgt. Naar dat men dus voor den kromte-straal eene positieve of negatieve waarde vindt, hetgeen eeniglijk van het teeken des noemers in form. (8) afhangt, zal ook $z' > $ of $< z$ worden, en hierdoor zal de rigting des kromte-straals met betrekking tot het rakend vlak geheel bepaald zijn.

De gemelde noemer, geschreven onder den vorm van het product

$$\cos.^2 a \left\{ t \frac{\cos.^2 \alpha}{\cos.^2 \beta} + 2s \frac{\cos.\beta}{\cos.\alpha} + r \right\},$$

toont, ingevolge eene bekende eigenschap der tweede magts-vergelijkingen, aan, dat hij voor alle waarden van den hoek α hetzelfde teeken behoudt, bijaldien de differentiaal-quotienten r, s, t, voldoen aan de voorwaarde $s^2 < rt$.

In dat geval liggen al de normale doorsneden aan dezelfde zijde van het rakend vlak, en het oppervlak wordt alsdan gezegd in de nabijheid van en rondom het raakpunt *bol* te zijn, Heeft men echter $s^2 > rt$, dan zal de noemer in form. (8) van teeken veranderen, en de kromtestraal bij dezen overgang oneindig groot worden. Het oppervlak zal zich rondom het beschouwde punt, aan verschillende zijden van het rakend vlak uitstrekken, en dus krommingen in tegenovergestelden zin opleveren, terwijl eene der normale doorsneden hierbij in eene regte lijn zal overgaan, hetgeen onder anderen bij de scheve oppervlakken altijd het geval is. De differentiaal-vergelijking, welke in § 195 voor deze soort van oppervlakken gevonden is, namelijk

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0,$$

bevestigt tevens deze omstandigheid. Immers kan zij ook aldus geschreven worden,

$$(qr - ps)^2 = p^2(s^2 - rt),$$

ten blijke, dat bij de scheve oppervlakken altijd $s^2 > rt$ is.

Heeft men $s^2 = rt$, welke vergelijking het karakter der ontwikkelbare oppervlakken uitdrukt, dan wordt de noemer in de waarde van ρ een volkomen vierkant, en de kromtestraal behoudt steeds hetzelfde teeken. Het oppervlak is dus ook bol in alle rigtingen behalve in die der beschrijvende lijn, voor welke de gezegde noemer nul, en dus de kromtestraal oneindig groot wordt.

§ 209. Het onderzoek naar de betrekking tusschen de kromtestralen voor hetzelfde punt in verschillende normale doorsneden gelegen, kan aanmerkelijk vereenvoudigd worden, door den oorsprong der coördinaten in dat punt te verplaatsen, en daarbij het rakend vlak tot het xy-vlak aan te nemen. Als dan heeft men $\beta = 90^0 - \alpha$ en $\gamma = 90^0$.

Wijders volgt uit de vergelijking van het rakend vlak, $p = 0$, $q = 0$. Derhalve gaat de form. (8) over in

$$\rho = \frac{1}{r\, cos.^2 a + 2s\, cos.\, a\, sin.\, a + t\, sin.^2 a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

waardoor de lengte des kromtestraals onmiddellijk uitgedrukt wordt, in functie van den hoek a, begrepen tusschen de normale doorsnede en het xz-vlak. Indien de noemer van het voorgaande gebroken voor een maximum of minimum vatbaar is, zullen de daarmede overeenstemmende waarden van a de normale doorsneden doen kennen, die in het raakpunt de grootste of kleinste kromming bezitten. Differentiëren wij dan dezen noemer ten opzigte van a, zoo verkrijgen wij, ter bepaling der grootste en kleinste waarden van ρ, de vergelijking

$$\frac{d(\frac{1}{\varrho})}{da} = 2(t - r)\, sin.a\; cos.a + 2s\, cos.\, 2a = 0$$

of

$$tg\, 2a = \frac{2s}{r - t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Deze formule levert twee waarden van a op, die 90^0 van elkander verschillen, ten blijke, dat de twee normale doorsneden, welke de grootste of kleinste kromming opleveren, op elkander regthoekig staan. Men is gewoon die met den naam *hoofd-doorsneden* te bestempelen.

De waarde van $\frac{1}{\varrho}$ ten tweeden male differentiërende, komt er

$$\frac{d^2(\frac{1}{\varrho})}{da} = -\left\{4s\, sin.2a + 2(r - t)\, cos.2a\right\},$$

of

$$= -\, 2\, sin.2a\, \left(2s + (r - t)\, cot.\, 2a\right)$$

$$= -\frac{sin.\, 2a}{s}\left(4s^2 + (r - t)^2\right),$$

en hieruit mogen wij besluiten, dat voor positieve waarden van s, de hoofd-doorsnede, welke een scherpen hoek met het xz-vlak vormt, de *grootste* kromming, en de andere hoofd-doorsnede de *kleinste* kromming oplevert, terwijl het tegenovergestelde plaats vindt voor negatieve waarden van s.

§ 210. Wij kunnen thans aan de algemeene waarde van ρ in form. (9) vervat, een' nog eenvoudiger vorm geven, door de raaklijnen, die den stand der hoofd-doorsneden bepalen, en, gelijk zoo even gebleken is, op elkander regthoekig staan, tot assen der x en y

aan te nemen. Immers in dat geval, moeten de beide waarden van a door de form. (10) aangewezen, overgaan in 0^0 en 90^0, waardoor, behoudens het bijzonder geval van $r - t = \infty$, $s = 0$ moet worden, zoodat de form. (9) zich als nu herleidt tot

$$\rho = \frac{1}{r \cos.^2 a + t \sin.^2 a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Door hierin achtervolgens $a = 0$ en $a = 90^0$ te stellen, ververkrijgt men voor de kromtestralen R, R' behoorende tot de beide hoofd-doorsneden,

$$R = \frac{1}{r}, \quad R' = \frac{1}{t},$$

dus

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \cos.^2 a + \frac{1}{R'} \sin.^2 a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

welke formule, voor elk punt des oppervlaks, eene eenvoudige betrekking bevat tusschen den kromtestraal in eene willekeurige normale doorsnede, en dien behoorende tot de beide hoofd-doorsneden van dat punt.

Beschouwen wij twee op elkander regthoekige doorsneden, makende de hoeken a en $a + 90^0$ met het xz-vlak. Zoo nu ρ' den kromtestraal voor de tweede dezer doorsneden voorstelt, dan heeft men, volgens (12),

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} \sin.^2 a + \frac{1}{R'} \cos.^2 a.$$

Gevolgelijk

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Deze opmerkelijke betrekking leert ons, dat bij zoodanige oppervlakken, die in alle rigtingen bol zijn ten opzigte van het rakend vlak, en alwaar dus de kromtestralen overal hetzelfde teeken hebben, de som der krommings-maten, voor twee op elkander regthoekige normale doorsneden, eene standvastige waarde behoudt. Deze omstandigheid zal, blijkens de formule

$$\frac{1}{\rho} = r \cos.^2 a + t \sin.^2 a,$$

altijd plaats hebben, bijaldien r en t, en dus ook R, R' beide met hetzelfde teeken zijn aangedaan.

§ 211. Bij de scheve oppervlakken, voor welke in het algemeen $rt < s^2$ is, zullen r en t, omdat hier $s = 0$ is, met ongelijke teekens moeten aangedaan zijn; waardoor ook R en R' ongelijke

teekens verkrijgen. Nemen wij dan R als positief, en dus R' als negatief, dan heeft men voor deze soort van oppervlakken,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \cos.^2 a - \frac{1}{R'} \sin.^2 a,$$

of

$$\frac{1}{\rho} = \cos.^2 a \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} tg.^2 a\right).$$

Het blijkt hieruit, dat zoo lang de hoek a aangroeit van 0 tot a', zijnde $tg. a' = \pm \sqrt{\frac{R'}{R}}$, ρ eene positieve waarde behoudt, die echter altijd $> R$ zal zijn, vermits men, de voorgaande vergelijking onder dezen vorm schrijvende

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \sin.^2 a,$$

terstond inziet, dat $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{R}$, en dus $\rho > R$ moet zijn.

Voor $a = \pm a'$ wordt $\rho = \infty$. Indien men derhalve in het rakend vlak twee lijnen door het raakpunt trekt, snijdende de as der x, onder de hoeken a' en $-a'$, zullen de normale doorsneden, volgens die beide rigtingen gebragt, het gebogen oppervlak volgens twee beschrijvende lijnen snijden.

Neemt men $a > a'$, dan verkrijgt ρ negatieve waarden, welke steeds afnemen, en voor $a = 90^0$ wederom een minimum opleveren, zoo als blijkt uit de vergelijking

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R'} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \cos.^2 a,$$

waarvan het tweede lid als dan de grootste waarde bekomt. Wordt $a > 90^0$, dan zal de kromtestraal op nieuw negatief toenemen, en voor $a = 180^0 - a'$ oneindig groot worden, om vervolgens eene positieve waarde te hernemen.

De beide normale doorsneden, gaande door de lijnen $y = a'x$, $y = -a'x$, zijn dus als de grensvlakken te beschouwen, binnen welke de deelen van het oppervlak, die tegenovergestelde krommingen bezitten, besloten blijven. De hyperboloïde met een blad, en de parabolische hyperboloïde kunnen hierbij onder anderen tot voorbeelden strekken.

§ 212. Voor de ontwikkelbare oppervlakken geeft de formule (9), uit hoofde van $rt = s^2$,

$$\rho = \frac{1}{(\cos. a \sqrt{r} + \sin. a \sqrt{t})^2},$$

aantoonende, dat de kromtestraal alsdan het positieve teeken blijft behouden, en dus al de normale doorsneden de bolle zijde naar het rakende vlak keeren, hetgeen ook geheel overeenkomstig is met den aard dezer oppervlakken. Maakt de normale doorsnede eenen hoek a' met het vlak der xz, zoo dat

$$tg.\, a' = -\sqrt{\frac{r}{t}},$$

dan wordt $\rho = \infty$; de snijding met het oppervlak geschiedt dus volgens de beschrijvende lijn, en levert eene hoofd-doorsnede op. De waarde van a, welke ρ tot een minimum maakt, is gegeven door de vergelijking

$$sin.\, a\sqrt{r} - cos.\, a\sqrt{t} = 0,$$

waaruit volgt $$tg.\, a = \sqrt{\frac{t}{r}} = -cot.\, a'.$$

De doorsnede van de grootste kromming staat derhalve ook hier loodregt op de voorgaande, voor welke de kromming nul wordt.

§ 213. De veranderingen in de lengten der kromtestralen voor de verschillende normale doorsneden, gaande door hetzelfde punt van eenig gebogen oppervlak, laten zich op eene eenvoudige wijze aanschouwelijk maken. Men zette namelijk op de raaklijnen dezer doorsneden, te rekenen van het raakpunt, afstanden uit, gelijk aan de vierkants-wortels uit de lengten der overeenkomstige kromtestralen, dan zal de vergelijking der kromme, welke de uiteinden dezer afstanden vereenigt, altijd tot eene der kegelsneden behooren. Immers, noemende x', y' de coördinaten van een harer punten, zoo heeft men

$$x' = \rho^{\frac{1}{2}} cos.\, a, \qquad y' = \rho^{\frac{1}{2}} sin.\, a,$$

dus, volgens formule (11),

$$rx'^2 + ty'^2 = 1.$$

Zijn nu r en t beiden positief, dan wordt die kromme eene ellips, waarvan $\sqrt{R}$ en $\sqrt{R'}$ de beide halve assen voorstellen, zoo dat de stand der beide hoofd-doorsneden door de rigtingen dezer assen aangewezen wordt. Zijn daarentegen r en t van ongelijke teekens, waardoor tevens de waarden van ρ gedeeltelijk positief en gedeeltelijk negatief worden, dan verandert de voorgaande vergelijking in

$$rx'^2 - ty'^2 = \pm 1,$$

en hierdoor bekomt men een stelsel van twee toegevoegde hyperbolen, welker assen insgelijks den stand der hoofd-doorsneden aanwijzen, terwijl de rigtingen der beide assymptoten overeenkomen met die der normale doorsneden, welke regte lijnen opleveren. Het is overigens gemakkelijk in te zien, dat de eigenschap der kromtestralen in vergel. (13) vervat, geheel overeenkomstig is met die der op elkander loodregte middellijnen in de genoemde kegelsneden. Neemt men de rigtingen der hoofd-doorsneden als bekend aan, en construeert men in het eerste der beide voorgaande gevallen eene ellips; en in het tweede, twee toegevoegde hyperbolen tot halve assen hebbende $\sqrt{R}$, $\sqrt{R'}$, dan zullen de vierkanten der uit het middelpunt getrokken voerstralen, de kromtestralen van de normale doorsneden doen kennen, welke die voerstralen tot raaklijnen hebben.

Voor $R = R'$ verandert de kromme in eenen cirkel, ten blijke dat al de doorsneden in het raakpunt gelijke kromtestralen hebben.

Bij de ontwikkelbare oppervlakken zal de kegelsnede overgaan in een stelsel van twee evenwijdige lijnen begrepen in de vergelijking

$$x'\sqrt{r} + y'\sqrt{t} = \pm 1.$$

De rigtingen der hoofd-doorsneden worden in dat geval aangewezen door twee lijnen, door den oorsprong getrokken, loodregt op en evenwijdig aan de twee voormelde lijnen. De eerste komt met de grootste, en de tweede met de kleinste kromming overeen. Men kan deze rigtingen tot assen der x en y aannemen, als wanneer men, uithoofde van $t = 0$, de navolgende betrekking bekomt

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \cos.^2 a,$$

of

$$\rho = R \sec.^2 a.$$

Voor $a = 90$ wordt $\rho = \infty$.

§ 214. Door elke raaklijn aan eenig gegeven punt des oppervlaks laten zich behalve de normale tevens een onbepaald aantal andere schuinsche doorsneden brengen.

Tusschen den kromtestraal voor eene dezer laatste doorsneden en dien der normale, bestaat insgelijks eene eenvoudige betrekking, welke door Meunier, een Fransch wiskundige der vorige eeuw, het eerst is opgemerkt geworden. Zij kan onder anderen vrij gemakkelijk aldus worden betoogd. Volgens het gevondene in § 169 heeft men, den kromte-

straal in het punt (x, y, z) eener willekeurige schuinsche doorsnede ρ' noemende, voor de cosinussen der hoeken door die lijn met de positieve assen der x, y, z gevormd,

$$\rho'\frac{d^2x}{ds^2},\qquad \rho'\frac{d^2y}{ds^2},\qquad \rho'\frac{d^2z}{ds^2},$$

waarbij de differentiaal des boogs s als standvastig is aangenomen.

De cosinussen der hoeken door de normaal van dat punt des oppervlaks met dezelfde assen gevormd, hebben, ingevolge § 179, tot waarden

$$\frac{-p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},\qquad \frac{-q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},\qquad \frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}.$$

Derhalve heeft men ter bepaling van den hoek ϑ tusschen de kromtestralen der schuinsche en normale doorsneden begrepen, de vergelijking

$$\cos.\vartheta = \frac{\rho'\{d^2z - pd^2x - qd^2y\}}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}\,ds^2}.$$

Maar, in § 207, vonden wij voor de waarde des kromtestraals ρ eener normale doorsnede, de formule

$$\rho = \frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}ds^2}{d^2z - pd^2x - qd^2y},$$

waaruit volgt

$$\rho' = \rho\cos.\vartheta.$$

Daar nu de hoek ϑ tevens de helling voorstelt der schuinsche doorsnede op de normale, zoo leeren wij hieruit de navolgende eigenschap kennen.

De kromtestraal in eene schuinsche doorsnede is gelijk aan de projectie op dat vlak, van den kromtestraal in eene normale doorsnede, welke met de eerste, dezelfde raaklijn heeft.

Verbeelden wij ons thans een' bol, beschreven met den kromtestraal ρ, en tot middelpunt hebbende de uiteinde van dezen kromtestraal, dan zal elk willekeurig vlak door de raaklijn gebragt, den bol snijden volgens een' cirkel, die den kromte-cirkel zal voorstellen in de doorsnede des oppervlaks met het genoemde vlak.

Het voorgaande theorema, waardoor men in staat is den kromtestraal voor elke in stand gegevene schuinsche doorsnede uit dien der normale te berekenen, is ook voor het navolgende meetkunstig betoog vatbaar. Laten namelijk MT (*fig.* 61) de raaklijn aan eenig punt

des oppervlaks M; de kromme AMN de normale, en de kromme $A'MN'$ de schuinsche doorsnede volgens die raaklijn, voorstellen. Brengen wij verder door de oneindig digt bij elkander gelegen punten M, m', dezer laatste kromme, twee normale vlakken elkander snijdende volgens de lijn OO', en het vlak der kromme, volgens de normalen MO, $m'O$, dan is MO de kromtestraal ρ' in het punt M der schuinsche doorsnede. Daar de raaklijn MT loodregt staat op het vlak der lijnen MO, OO', zal de normaal MI in het punt M der normale doorsnede AMN, de loodlijn OO' ergens in een punt O' moeten snijden, zoodat de hoek OMO' de helling ϑ der schuinsche op de normale doorsnede aanduidt. Uit den regthoekigen driehoek MOO' volgt nu de betrekking $\rho' = MO = MO' \cos.\vartheta$. Er blijft dus nog te bewijzen overig, dat de lijn MO' werkelijk de lengte des kromte-straals van het punt M der normale doorsnede voorstelt. Te dien einde neme men op deze kromme een' oneindig kleinen boog Mm, en trekke de lijnen mO', $m'O'$ en mm', dan zal deze laatste, ingevolge de theorie der kromlijnige aanrakingen (XVIe en XXVe Lessen), eene oneindig kleine van de tweede orde zijn. Daar wijders de hoek $O'mm'$, bij achtervolgende vermindering der boogjes Mm, Mm', klaarblijkelijk tot 90° nadert, zal het verschil tusschen de afstanden $O'm$ en $O'm'$ eene oneindig kleine van de derde orde worden. Nu is het verschil $Om' — OM$, en dus ook het verschil $O'm' — O'M$ oneindig klein van de derde orde, derhalve zal ook het verschil $O'm — O'M$, in het algemeen, van dezelfde orde zijn, waaruit men terstond besluiten mag, dat de cirkel met $O'M$ als straal beschreven, de kromte-cirkel van het punt M zal zijn, en men alzoo stellen kan $\rho' = \rho \cos.\vartheta$. Mogt het laatstgenoemde verschil, in eenig bijzonder geval, eene oneindig kleine van hoogere orde worden, zoude zulks eeniglijk aanduiden, dat ook de kromtecirkel in het punt M eene naauwere aanraking met de kromme had, gelijk onder anderen in de toppen der kegelsneden plaats vindt (§ 122).

§ 215. Twee oppervlakken O, O', die in eenig punt M eene gemeenschappelijke normaal hebben, worden gezegd met elkander eene raking van de tweede orde te hebben, of elkander in dat punt te osculeren, bij aldien de verschillende normale doorsneden der beide oppervlakken, door dat punt M gebragt, insgelijks eene raking van dezelfde orde met elkander hebben; dat is, met andere woorden, bij aldien de kromtestralen in het raakpunt, voor de beide krommen

eener zelfde willekeurige doorsnede even lang zijn. Daarnu de formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \cos.^2 \alpha + \frac{1}{R'} \sin.^2 \alpha$$

aantoont, dat ρ eeniglijk afhankelijk is van R, R' en α, mogen wij hieruit onmiddelijk besluiten, dat zoodra de hoofd-doorsneden, gaande door het raakpunt der beide oppervlakken, in dezelfde vlakken liggen, en aldaar gelijke kromtestralen hebben, ook al de overige normale doorsneden kromme lijnen zullen opleveren, die elkander in het raakpunt osculeren, waardoor derhalve aan de voorwaarde voor het bestaan eener raking van de tweede orde tusschen de beide oppervlakken voldaan is. Men kan daarenboven uit de in § 213 aangewezen constructie afleiden, dat, aangezien eene ellips of hyperbool geheel bepaald is, indien drie uit het middelpunt getrokken voerstralen in ligging en grootte gegeven zijn, twee gebogen oppervlakken elkander zullen osculeren, indien drie door het raakpunt gebragte normaal vlakken, die oppervlakken snijden volgens kromme lijnen, welke, voor dezelfde doorsnede, denzelfden kromtestraal in het raakpunt hebben. Past men hierbij tevens het theorema van Meunier toe, dan volgt daaruit nog, dat die doorsneden niet normaal behoeven te zijn. De rakende oppervlakken zullen derhalve ook in alle rigtingen dezelfde kromming hebben, bij aldien zulks plaats heeft in hare doorsneden volgens drie door het raakpunt geheel willekeurig gebragte vlakken, en hiertoe kan men onder anderen kiezen drie aan de coördinaten-vlakken evenwijdige doorsneden.

De formule

$$\rho = \frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{r \cos.^2 \alpha + 2s \cos.\alpha \cos.\beta + t \cos.^2 \beta}$$

in § 207 gevonden, leert onmiddelijk de analytische voorwaarden kennen, waaraan de coördinaten x, y, z, bij de voormelde aanraking behooren te voldoen. Daar namelijk de beide oppervlakken een gemeenschappelijk rakend vlak hebben, moeten vooreerst de differentiaal-quotienten p en q, in het raakpunt dezelfde waarden verkrijgen. Wijders merke men op, dat, aangezien de hoeken α en β de rigting bepalen der raaklijn aan de beide krommen tot dezelfde normale doorsnede behoorende, de grootheid

$$r \cos.^2 \alpha + 2s \cos.\alpha \cos.\beta + t \cos^2 \beta,$$

bij den overgang van de eene kromme tot de andere, hare waarde

behoudt, en daar zulks voor elke willekeurige normale doorsnede evenzeer geldt, komen wij tot het besluit, dat ook de drie differentiaal-quotienten van de tweede orde r, s, t, voor beide oppervlakken, in het raakpunt dezelfde waarden moeten verkrijgen. Hieruit volgt ook omgekeerd, dat, bij aldien voor twee verschillende oppervlakken de zes grootheden

$$z, p, q, r, s, t,$$

in eenig punt dezelfde waarden opleveren, en met gelijke teekens zijn aangedaan, die oppervlakken in dat punt eene raking van de tweede orde zullen hebben.

§ 216. Op grond der voorgaande eigenschappen is het thans niet moeijelijk voor elk punt van eenig gebogen oppervlak, alwaar de kromming in alle rigtingen bol ten aanzien van het rakend vlak is, eene ellipsoïde aan te wijzen, die met het oppervlak eene raking van de tweede orde heeft, en dus dezelfde kromming in alle rigtingen vertoont.

Onderstellen wij te dien einde, dat de krommen MA, MB, (*fig.* 62) twee hoofd-doorsneden aanwijzen, gaande door het punt M van eenig oppervlak, en zich volgens de normaal MON snijdende. Verbeelden wij ons thans in die doorsneden twee ellipsen Ma, Mb, beschreven, hebbende een willekeurig gedeelte der normaal $MO = c$ tot gemeenschappelijke as, dan is het altijd mogelijk de beide overige assen in dier voege te bepalen, dat deze ellipsen in den top M dezelfde kromtestralen R, R' verkrijgen als de doorsneden, waarin zij beschreven zijn. Immers weten wij uit het gevondene in § 108, dat in elke kegelsnede de kromtestraal in den top aan den halven parameter gelijk is. De halve assen a en b moeten diensvolgens bepaald worden uit de vergelijkingen

$$R = \frac{a^2}{c}, \qquad R' = \frac{b^2}{c},$$

gevende

$$a = \sqrt{cR}, \qquad b = \sqrt{cR'}.$$

Indien wij nu eene ellipsoïde beschouwen, welker halve assen zijn a, b, c, en waarvan het middelpunt in O ligt, dan zullen de ellipsen Ma, Mb, blijkbaar twee hoofd-doorsneden daarvan voorstellen, en dewijl deze in het punt M gelijke kromming hebben als de doorsneden MA, MB van het gegeven oppervlak, zoo zal zulks, volgens

het hiervoren betoogde, insgelijks met elke andere doorsnede der beide oppervlakken plaats vinden, waardoor dus de aangewezene ellipsoïde tot de zoodanige behoort, die in het raakpunt gelijke kromming met het gegeven oppervlak hebben.

Zijn echter de beide kromtestralen R, R' in het gegeven punt van tegenovergestelde teekens, zoo dat het oppervlak zich aldaar aan verschillende zijden van het rakend vlak uitstrekt, dan zal men, R positief nemende, voor a eene bestaanbare, doch voor b eene onbestaanbare waarde verkrijgen, indien namelijk c wederom in dezelfde rigting genomen wordt. Eene der ellipsen zal als dan in eene hyperbool overgaan, waarvan de lijn MO de eerste as voorstelt, en de ellipsoïde kan in dat geval door eene hyperboloïde met een blad vervangen worden, hebbende de ellips Ma tot keel-doorsnede.

Daar wijders aan de lijn $MO = c$ eene willekeurige waarde gegeven kan worden, zoo blijkt hieruit dat er, in het eerste der hiervoren beschouwde gevallen, een oneindig aantal ellipsoïden, en in het tweede, een oneindig aantal hyperboloïden zijn aan te wijzen, die in een' van hare toppen dezelfde kromming hebben als eenig gegeven oppervlak in een zijner punten.

Bij een ontwikkelbaar oppervlak wordt de kromtestraal voor een der twee hoofd-doorsneden oneindig groot, zoo dat de daartoe behoorende ellips in een stelsel van twee evenwijdige lijnen (§ 213), en de rakende ellipsoïde in een cilinder-vlak overgaat, tot rigtlijn hebbende de ellips in de andere hoofddoorsnede gelegen, en hetwelk het gegeven oppervlak volgens eene beschrijvende lijn zal raken. Voor elk punt dezer lijn zal echter de krommings-cilinder verschillend zijn, vermits de elliptische rigtlijn met de ligging van dat punt verandert.

§ 217. In het bijzonder geval waarin voor eenig punt eens oppervlaks $R' = R$ wordt, zullen ook, ingevolge formule (12), de kromtestralen van alle overige normale doorsneden even groot en gelijk aan R zijn. Het oppervlak heeft als dan in dat punt dezelfde kromming in alle rigtingen, waardoor deze kromming met die van eenen bol kan vergeleken worden. Zulks heeft onder anderen plaats in de beide aspunten van een omwentelings-oppervlak. Dergelijke punten dragen in het bijzonder den naam van *navelpunten* (*ombilics*). Om te onderzoeken of zij op eenig gegeven oppervlak aanwezig zijn, neme men tot grondslag de in § 207 gevondene formule voor de

lengte des kromtestraals eener willekeurige normale doorsnede, te weten:

$$\rho = \sqrt{(1+p^2+q^2)} \left\{ \frac{(1+p^2)+2pqm+(1+q^2)m^2}{r+2sm+tm^2} \right\}.$$

Zal nu ρ onveranderd blijven voor elke waarde van m, welke den stand der normale doorsnede bepaalt, dan moet het voorgaande gebroken onafhankelijk van m zijn, waartoe slechts gevorderd wordt dat aan de evenredigheid,

$$1+p^2 : pq : 1+q^2 = r : s : t,$$

voldaan worde.

De voorwaarden van het aanwezig zijn eens navelpunts zijn mitsdien vervat in de beide vergelijkingen

$$\frac{1+p^2}{pq} = \frac{r}{s}, \qquad \frac{pq}{1+q^2} = \frac{s}{t},$$

gevende

$$s(1+p^2) = pqr, \qquad s(1+q^2) = pqt,$$

dus ook

$$t(1+p^2) = r(1+q^2).$$

Uit twee dezer laatsten, in verband met de vergelijking $z = f(x, y)$ van het oppervlak, zal men het al of niet bestaan van navelpunten kunnen opmaken.

Mogten die laatste vergelijkingen, in sommige bijzondere gevallen, vatbaar zijn om tot eene enkele herleid te worden, dan verkrijgt men eene kromme lijn voor de meetkunstige plaats der navelpunten; zij wordt de lijn der spherische krommingen genaamd, dewijl de kromming van het oppervlak in al deze punten met die van eenen bol overeenkomt.

EEN EN DERTIGSTE LES.

Over de kromte- of krommings-lijnen op de gebogen oppervlakken.

§ 218. Wanneer men van eenig punt (x, y, z) op een gebogen oppervlak in eene willekeurige rigting overgaat tot een ander oneindig nabij gelegen punt, dan liggen de normalen tot die beide punten behoorende, in het algemeen, niet in hetzelfde vlak. Om te onderzoeken of er voor elk punt eene bepaalde rigting aan te wijzen zij, waarbij de normalen van twee in die rigting genomen naburige punten elkander snijden, kan men aldus te werk gaan.

De vergelijkingen der normaal van eenig punt (x, y, z) zijn (§ 179),

$$\left.\begin{aligned} x' - x + p(z' - z) &= 0. \\ y' - y + q(z' - z) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

Laat men hierin de veranderlijke grootheden x, y, z, p, q, met hare differentialen aangroeijen, zoo zullen de hieruit ontstaande vergelijkingen die eener naburige normaal voorstellen. Opdat er dus snijding tusschen die beide normalen plaats hebbe, behooren de coördinaten x', y', z', gelijktijdig aan de voorgaande vergelijkingen en aan hare differentiaal-betrekkingen te voldoen. Deze laatste zijn blijkbaar de navolgende.

$$dx + p\,dz = (z' - z)\,dp,$$

$$dy + q\,dz = (z' - z)\,dq,$$

en hierin voor dz, dp, dq hunne waarden schrijvende, veranderen die vergelijkingen in

$$\left.\begin{aligned} (1 + p^2)\,dx + pq\,dy &= (z' - z)(r\,dx + s\,dy) \\ (1 + q^2)\,dy + pq\,dx &= (z' - z)(s\,dx + t\,dy) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (B)$$

De vier vergelijkingen (A), (B) strekken nu niet alleen ter bepaling der coördinaten x', y', z' van het snijpunt, maar zullen

tevens, door het elimineren van $z'-z$ uit het stelsel (B), de voorwaarde doen kennen, waaraan de betrekking tusschen de differentialen dx, dy zal moeten voldoen, opdat de snijding der beide opvolgende normalen kunne plaats hebben. Die voorwaarde is dus vervat in de vergelijking

$$\frac{1+p^2+pq\frac{dy}{dx}}{(1+q^2)\frac{dy}{dx}+pq}=\frac{r+s\frac{dy}{dx}}{s+t\frac{dy}{dx}},$$

waaruit volgt, ter bepaling van $\frac{dy}{dx}$, of van de horizontale projectie der raaklijn in het punt x, y, z,

$$((1+q^2)s-pqt)\frac{dy^2}{dx^2}+((1+q^2)r-(1+p^2)t)\frac{dy}{dx}$$
$$-((1+p^2)s-pqr)=0\;.\;.\;.\;.\;.\;(C)$$

Deze vergelijking van den tweeden graad zijnde, duidt alzoo twee verschillende rigtingen aan, waarin de voorgestelde eigenschap der normalen zal kunnen plaats vinden.

§ 219. Indien het gegeven punt tot de navelpunten behoort, zal de vergel. (C), blijkens het gevondene in § 217, voor alle waarden van $\frac{dy}{dx}$ gelden, hetgeen dus beteekent, dat men in zoodanig punt eene willekeurige rigting kan volgen.

Het valt niet moeijelijk te betoogen, dat de beide waarden van $\frac{dy}{dx}$ steeds twee op elkander regthoekige rigtingen aanwijzen.

Immers, nemende voor een oogenblik het rakend vlak in het punt x, y, z wederom tot dat der xy, en het raakpunt tot oorsprong der coördinaten aan, dan heeft men, even als in § 209, $p=0$, $q=0$, zoodat de verg. (C) hierdoor overgaat in

$$s\frac{dy^2}{dx^2}+(r-t)\frac{dy}{dx}-s=0,$$

of
$$\frac{dy^2}{dx^2}+\left(\frac{r-t}{s}\right)\frac{dy}{dx}-1=0,$$

en nu duidt de laatste term in deze vierkants-vergelijking terstond aan, dat de rigtingen der raaklijnen, aangewezen door de beide waarden van $\frac{dy}{dx}$, een' regten hoek met elkander vormen.

Wijders heeft men, ter bepaling van de hoeken a, a', welke deze raaklijnen met de as der x vormen,

$$tg.\,a = \frac{-(r-t)+\sqrt{\{4s^2+(r-t)^2\}}}{2s},$$

$$tg.\,a' = -cot.\,a = \frac{-(r-t)-\sqrt{\{4s^2+(r-t)^2\}}}{2s}.$$

Dus $$tg.\,a - cot.\,a = \frac{t-r}{s},$$

$$2\,cot.\,2a = \frac{r-t}{s},$$

of $$tg.\,2a = \frac{2s}{r-t}.$$

Deze uitkomst dezelfde waarde voor a opleverende, als de form. (10) § 209 voor de rigting der hoofd-doorsneden, mogen wij hieruit het besluit opmaken, dat, indien men van eenig willekeurig punt M op het oppervlak overgaat tot twee andere oneindig digt gelegen punten M_1, m_1, in dier voege dat de boogjes MM_1, Mm_1 tot de beide hoofd-doorsneden van het punt M behooren, de normalen van de punten M_1, m_1, die van het punt M in twee afzonderlijke punten zullen doorsnijden.

Gaat men nu in denzelfden zin van M_1 tot een ander naburig punt M_2 over, welks normaal die van M_1 snijdt, en van M_2 wederom tot een derde punt M_3 over, dat aan dezelfde voorwaarde ten opzigte van M_2 voldoet, dan zal men, op die wijze, voor elk punt M eene reeks punten, elkander in denzelfden zin opvolgende, verkrijgen. Evenzoo kan men eene tweede soortgelijke reeks bekomen, door van het punt m_1 in denzelfden zin tot de pnnten m_2, m_3 enz. over te gaan, zoodat ook de normalen dezer punten elkander twee aan twee snijden. De hieruit ontstaande kromme lijnen hebben, volgens den beroemden MONGE, de benaming van *kromte-lijnen* (*lignes de courbure*) van het punt M verkregen. Zij zijn, in het algemeen, van dubbele kromming, en dus verschillende van de kromme lijnen der hoofddoorsneden, die steeds in een plat vlak liggen. In elk van hare punten hebben zij echter eene gemeenschappelijke raaklijn met de door dat punt gebragte hoofd-doorsnede.

Daar wijders, gelijk hiervoren gebleken is, door elk punt eens oppervlaks, twee op elkander loodregte kromte-lijnen kunnen ge-

trokken worden, zal men, dezelfde bewerking voor elk willekeurig punt herhalende, het gebogen oppervlak in dier voege in een oneindig aantal kromlijnige vierhoeken kunnen verdeelen, waarvan de zijden op elkander loodregt staan.

§ 220. Verbeelden wij ons nu een' bol beschreven uit het snijpunt O (*fig.* 63) der normaal MO van eenig punt M met die van het naburige punt M_1 der hoofd-doorsnede MA, en tot straal hebbende den kromtestraal $MO = M_1O = R$ dezer doorsnede, dan zal die bol twee opvolgende raakpunten M, M_1 met het gegeven oppervlak gemeen, en in de rigting van het element MM_1, dezelfde kromming hebben als het gebogen oppervlak. Hetzelfde geldt van eenen tweeden bol beschreven uit O' met den kromtestraal R' der andere hoofd-doorsnede MB, en welke in de rigting van het element Mm_1 dezelfde kromming heeft als het oppervlak. Voor elke andere normale doorsnede MNC, waarvan $MP = NP$ den kromtestraal in het punt M aanwijst, zal zulks echter geene plaats meer vinden, dewijl de lijn NP niet tot de normalen van het oppervlak behoort, zoodat de bol met de lijn MP als straal beschreven, slechts in het punt M hetzelfde rakend vlak met het oppervlak kan hebben. De beide eerstgemelde bollen zijn derhalve de eenige die gezegd kunnen worden eene raking van de tweede orde met het oppervlak te hebben, *doch slechts in de bepaalde rigtingen* MM_1, Mm_1. Op dien grond schijnt dan ook de benaming te berusten van *kromte-lijnen*, welke Monge aan de reeks der punten M, M_1, M_2 en M, m_1, m_2... (§ 219) vermeend heeft te moeten geven.

Het zal noodig zijn hier nog te doen opmerken, dat de lijn $MO = R$ niet gelijktijdig den kromtestraal van het punt M voor de kromtelijn $M M_1 M_2$... aanduidt, dewijl die kromtestraal gelegen behoort te zijn in het krommingsvlak van dat punt, welk vlak verschillend is van de hoofd-doorsnede MA. Deze overeenstemming heeft eeniglijk plaats in het bijzonder geval, waarin de kromtelijn in deze doorsnede overgaat, of ook, indien die beide krommen twee achtervolgende elementen gemeen hebben, en dus elkander osculeren.

§ 221. Uit de voorgaande bepaling eener kromte-lijn volgt wijders dat de meetkunstige plaats van al hare normalen een ontwikkelbaar oppervlak vormt, dat overal loodregt op het gegeven oppervlak zal staan, en waarvan de keerlijn bepaald wordt door de snijpunten dezer normalen, zijnde de middelpunten der bollen,

welke in de rigting der elementen van de kromte-lijn, dezelfde kromming als het oppervlak bezitten Op die wijze ontstaan er keerlijnen voor elke der overige kromte-lijnen, die op het oppervlak in de rigtingen $M M_1 M_2$ en $M m_1 m_2$ kunnen getrokken worden. De meetkunstige plaats van al die keerlijnen vormt voor elke dezer beide rigtingen een gebogen oppervlak, hetwelk de genoemde normalen tot raaklijnen heeft, en waarvan de vergelijking kan verkregen worden, door het elimineren van x, y, z uit de vergelijkingen (A) en (B) § 218, in verband met de vergelijking van het gegeven oppervlak.

De beide aldus gevormde oppervlakken bevatten de middelpunten der hiervoren bedoelde bollen, en zijn ten opzigte dezer oppervlakken hetzelfde, hetgeen de ontwondenen bij de kromme lijnen zijn. Daar waar zij elkander doorsnijden, ontstaat eene nieuwe kromme, welke de meetkunstige plaats der middelpunten van de spherische kromten zal zijn.

§ 222. Bij de omwentelings-oppervlakken zullen de kromtelijnen in vlakke krommen, en dus in de hoofd-doorsneden zelven overgaan. De meridiaan-krommen hebben namelijk de eigenschap dat al de normalen in hare vlakken genomen, tevens loodregt op het oppervlak staan, zoo dat zij aan de voorwaarde van onderlinge snijding voldoen. Voor de parallel-krommen welker vlakken loodregt op de voorgaande staan, zijn de normalen op het gebogen vlak, allen door hetzelfde punt der omwentelings-as gerigt. Deze parallellen vormen dus, even als de meridianen, een stelsel van krommingslijnen op het omwentelings-oppervlak.

Bij de cilindrische oppervlakken is elke doorsnede volgens eene beschrijvende lijn eene der twee hoofd-doorsneden van eenig punt op die lijn gelegen, terwijl de andere hoofd-doorsnede loodregt op deze beschrijvende lijn gerigt is. Elke normaal in dit laatste vlak getrokken is blijkbaar insgelijks eene normaal op het cilindervlak, waaruit volgt dat die beide doorsneden tevens twee krommingslijnen voorstellen.

Om voor elk gegeven oppervlak de krommings-lijnen te bepalen, heeft men in de eerste plaats, uit de vergelijking van dat oppervlak $z = f(x, y)$, de waarden van p, q, r, s, t in functiën van x, y, z af te leiden, en deze vervolgens in de algemeene vergel. (C) te substituëren. Hierdoor bekomt men de differentiaal-vergelijking der projectiën op het xy-vlak van de gezochte

krommen, waaruit echter de betrekking tusschen x en y eeniglijk met behulp der integraal-rekening te vinden is, zoo dat wij te dezer plaats in geen verder onderzoek dienaangaande kunnen treden.

§ 223. Men beschouwt op elk gebogen oppervlak nog eene kromme lijn, welker elementen elkander in dier voege opvolgen, dat hunne rigtingen of die der raaklijnen in de opvolgende punten, het horizontale vlak onder hoeken snijden, welke steeds grooter zijn dan die der overige raaklijnen, door dezelfde punten op het oppervlak getrokken. Zoodanige krommen dragen den naam van *lijnen van grootste helling*. Hare differentiaal-vergelijking kan gemakkelijk aldus verkregen worden.

Elke raaklijn gaande door eenig punt x, y, z van het oppervlak, wordt op het xy-vlak geprojecteerd volgens de lijn

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x). \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

Zal nu die raaklijn onder den grootsten hoek op dat vlak hellen, dan moet zij, even als hare projectie, blijkbaar loodregt staan op de gemeene doorsnede van het rakend vlak met het projectie-vlak, Die doorsnede tot vergelijking hebbende

$$z + p(x' - x) + q(y' - y) = 0,$$

zoo zal, ingevolge vergel. (a), aan de gestelde voorwaarde voldaan worden, door $\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}$ te stellen.

Men heeft derhalve voor de differentiaal-vergelijking der bedoelde krommen,

$$pdy - qdx = 0.$$

Hieruit de waarde van z, die in de differentiaal-coëfficiënten p, q voorkomt, verdrijvende met behulp der vergel. $z = f(x, y)$ van het gegeven oppervlak, zoo geeft de integraal-rekening het middel aan de hand, om, uit de alsdan verkregene vergelijking, de betrekking tusschen x en y, of de horizontale projectie der kromme van grootste helling te bepalen; en door deze laatste wederom met de vergel. $z = f(x, y)$ te combineren, bekomt men de vergelijkingen van hare projectiën op de beide overige coördinaten-vlakken. In het algemeen zullen ook deze krommen tot de lijnen van dubbele kromming behooren. Voor de omwentelings-oppervlakken, welke, indien de om-

wentelings-as tot as der z aangenomen wordt, zoo als in § 187 geleerd is, allen begrepen zijn in de vergelijking

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

laten die krommen zich echter gemakkelijk bepalen. Immers heeft men in dat bijzonder geval,

$$p = 2\varphi_1(x^2 + y^2)x, \qquad q = 2\varphi_1(x^2 + y^2)y,$$

dus $$(xdy - ydx)\,\varphi_1'(x^2 + y^2) = 0,$$

waaruit volgt $$1^o.\ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \qquad 2^o.\ \varphi_1(x^2 + y^2) = 0.$$

Daar nu de eerste vergelijking voor geene kromme lijn, maar eeniglijk voor eene regte lijn, gaande door den oorsprong, kan gelden, zoo als terstond blijkt uit het differentiëren der vergelijking

$$y = ax,$$

zoo mag men hieruit onmiddelijk besluiten, dat al de meridiaankrommen van eenig omwentelings-oppervlak lijnen van grootste helling zijn.

De tweede vergelijking geeft voor z, en dus ook voor $x^2 + y^2$ eene standvastige waarde. Zij duidt al de doorsneden aan, welke loodregt door de omwentelings-as gebragt, en op het xy-vlak volgens cirkels geprojecteerd worden. Blijkbaar kan geene dezer doersneden hier in aanmerking komen, dewijl de raaklijnen in hare opvolgende punten overal evenwijdig aan het gemelde projectievlak gerigt zijn.

Dergelijke doorsneden van eenig gebogen oppervlak, leveren krommen op, welke men gewoon is *waterpasse lijnen* (*lignes de niveau*) te noemen. Hare differentiaal-vergelijking is klaarblijkelijk

$$p\,dx + q\,dy = 0.$$

Wij hebben ons, overeenkomstig het doel van dit leerboek, in deze laatste lessen slechts bij eenige hoofdpunten betreffende de theorie der gebogen oppervlakken moeten bepalen, doch vermeenen ten slotte onzen aankomenden wiskundigen, die lust gevoelen dat belangrijk onderwerp in meerdere bijzonderheden te leeren kennen, de studie der navolgende geschriften te mogen aanbevelen.

Recherches sur la courbure des surfaces, par EULER, geplaatst in de *Mémoires de l'Académie de Berlin*, voor het jaar 1760.

Application de l'analyse à la géométrie, par G. MONGE, 5ᵉ *édition, annotée*, par M. LIOUVILLE.

Développemens de géométrie, par CH. DUPIN, 3ᵉ *mémoire.*

Eene verhandeling van POISSON, voorkomende in het *Journal de l'École Polytechnique*, 21ᵉ *cahier.*

Mémoire sur la courbure des surfaces, par Mˡˡᵉ SOPHIE GERMAIN, te vinden in het VIIᵉ Deel van het *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, uitgegeven door CRELLE.

F. GAUSS. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Gotting. 1828.

Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions, par C. F. A. LE ROY,

Leçons de calcul différentiel et intégral, par MOIGNO, 1ᵉ *vol.*

Wij behooren hier nog bij te voegen den verdienstelijken arbeid van een' onzer landgenooten Dʳ. A. G. ALINGS te Groningen, het onderwerp uitmakende zijner *Dissertatio inauguralis de superficierum curvatura*, 1849, waarvan het vervolg door den schrijver toegezegd is.

EINDE VAN HET EERSTE DEEL.

Blz. 245	reg. 5	van bov.	*staat:*	$-\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dz}}$	*lees:*	$-\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dz}}dy$
» 245	» 5	» ond.	»	$\frac{d^2z}{d\varphi^2}$	»	$\frac{d^2z}{dy^2}$
» 249	» 10	» »	»	$F(x+h, y+k)$	»	$f(x+h, y+k)$
» 255	» 1	» »	»	*fig.* 52	»	*fig.* 53
» 256	» 6	» »	»	*fig.* 53	»	*fig.* 54
» 306	» 14	» bov.	»	de schroeflijn	»	de binnenste schroeflijn
» 318	» 14	» ond.	»	$\frac{dz}{dy}$	»	$\frac{dy}{dz}$
» 341	» 5	» »	»	α	»	γ
» 362	» 2	» bov.	»	$t\frac{\cos.^2\alpha}{\cos.^2\beta}$	»	$t\frac{\cos.^2\beta}{\cos.^2\alpha}$

MISSTELLINGEN.

Bladz. 114. *Voor de vier eerste regels leze men het volgende:*

De voorgaande uitkomsten gelden insgelijks voor de ontbinding van het gebroken $\frac{x^n}{x^m-1}$, m steeds een geheel positief getal zijnde, mits a hier vervangen worde door $\frac{2k\pi}{m}$; waarbij echter op te merken valt, dat, indien m *even* is, de noemer daarenboven de twee bestaanbare deelers $x+1$ en $x-1$ heeft, zoodat twee der partiële gebrokens onder het teeken Σ te vervangen zijn door $\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{x-1}\mp\frac{1}{x+1}\right\}$, naardat n *even* of *oneven* is. In het geval van m *oneven*, heeft men daarvoor eeniglijk te stellen den term $\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{x+1}$.

Bladz. 161, regel 10 van onderen, *staat:*

dat de subnormaal, even als bij de spiraal van Archimedes, overal van standvastige lengte is,

Men leze hiervoor:

dat de subtangens PT in elk punt van standvastige lengte is,

Bladz. 279, regel 15, voor ware anomalie, *leze men:* middelbare

Pl. I.

5.

M

X

M'

6.

Y

M

P'

O

P X

M'

7.

Y

A

M

O X

12.

Y

M_1

M

O X

13.

Y

M_2

M

M_1

O X

14.

M_2

M_1

M

O P' X

18.

k

g

h c d

b e

f

19.

Y

M'

M

OT T'P P' X

24.

N' M

T

N

X P

24.a

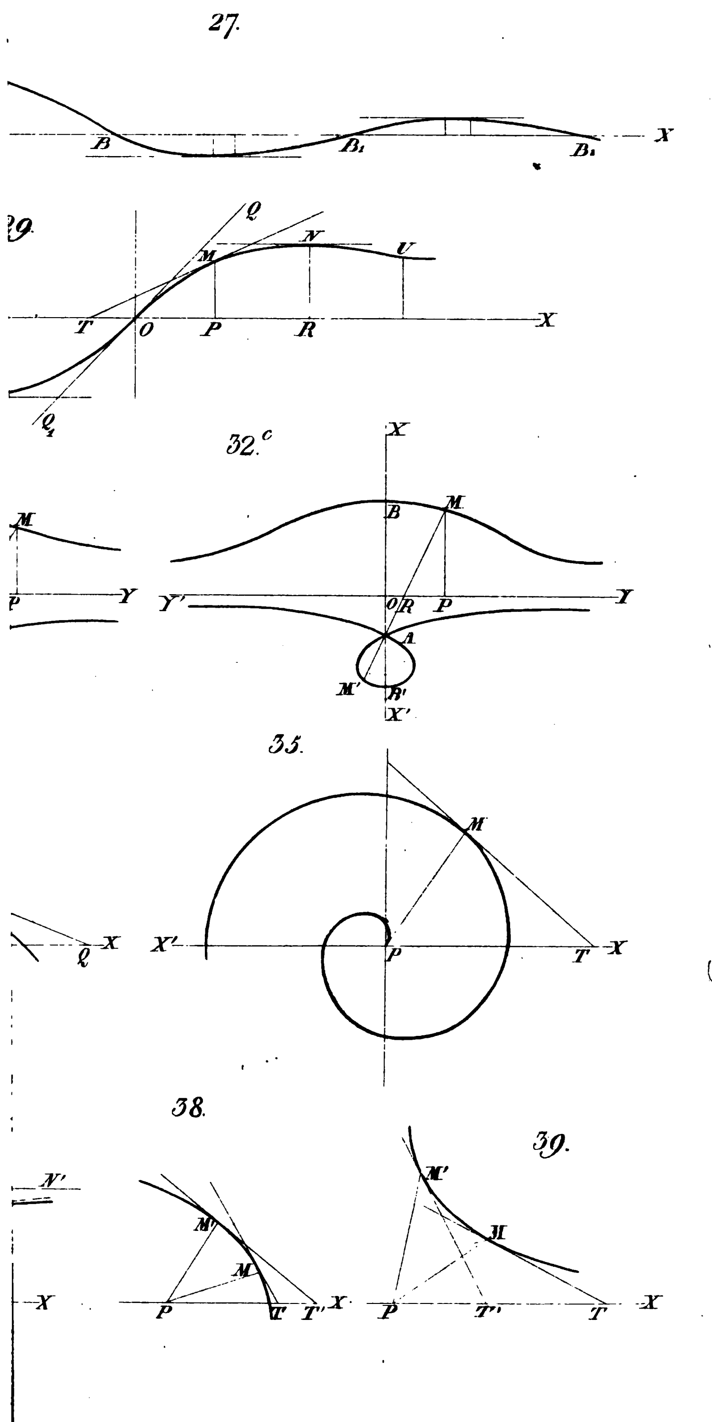
N

N'

M

T

P


27.
B
B₁
B₁
X
29.
Q
N
M
U
T
O
P
R
X
Q₁
32.c
X
M
B
M
P
Y
Y'
O R P
Y
A
M'
B'
X'
35.
M
X
Q
X'
P
T
X
38.
N'
M'
M
X
P
T
T'
X
39.
M'
M
P
T'
T
X

